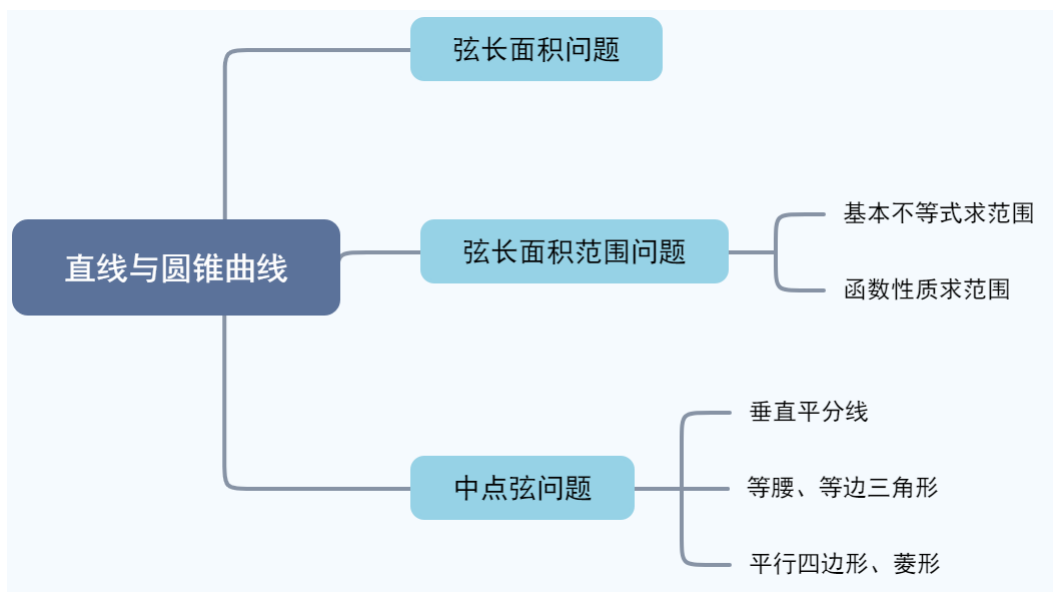


01直线与圆锥曲线的位置关系1



1. 弦长面积问题

【弦长公式】

设圆锥曲线 $C: f(x, y) = 0$ 与直线 $l: y = kx + b$ 相交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点,

$$\text{则弦长 } |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|},$$

$$\text{或 } |AB| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_y}}{|a|}.$$

💡 韦达定理与“设而不求”

【解题思路】 在解决直线与圆锥曲线的相关问题中, 我们常常使用“设而不求”法解决问题, 而韦达定理就是使用设而不求的工具之一, 也是最重要的工具, 弦长公式就是韦达定理的应用之一. 即不解出点的坐标, 直接去解出我们想要的结论.

1. 已知椭圆的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且过点 $P(-\sqrt{3}, \frac{1}{2})$.

(1) 求椭圆的标准方程.

(2) 已知斜率为 1 的直线 l 过椭圆的右焦点 F 交椭圆于 A 、 B 两点, 求弦 AB 的长.

2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设 Q 是椭圆 C 上且不在 x 轴上的一个动点, O 为坐标原点, 过右焦点 F 作 OQ 的平行线交椭圆于 M 、 N 两个不同的点, 求 $\frac{|MN|}{|OQ|^2}$ 的值.

3. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A ，上顶点为 B ，已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ， $|AB| = \sqrt{13}$ 。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 设直线 $l: y = kx (k < 0)$ 与椭圆交于 P, Q 两点， l 与直线 AB 交于点 M ，且点 P, M 均在第四象限，若 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的 2 倍，求 k 的值。

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，两焦点与短轴的一个端点的连线构成的三角形面积为 $\sqrt{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 相切的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 (O 为坐标原点)，求

$|OA| \cos \angle OAB + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \angle OBA}$ 的最大值。

5. 已知过点 $(0, -2\sqrt{3})$ ，斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点，椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在直线 $x = \frac{a^2}{2}$ 上。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 过点 $E(-2, 0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M, N ，且满足 $\tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3 \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}$ (O 为坐标原点)，求直线 m 的方程。

2. 弦长面积范围问题

6. 平面直角坐标系 xOy 中，过椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 右焦点的直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$ 交 M 于 A, B 两点， P 为 AB 的中点，且 OP 的斜率为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求 M 的方程。

(2) C, D 为 M 上两点，若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD \perp AB$ ，求四边形 $ACBD$ 面积的最大值。

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，且满足离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $|F_1 F_2| = 4\sqrt{3}$ ，过原点 O 且不与坐标轴垂直的直线 l 交椭圆 C 于 M, N 两点。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设点 $A(2, 1)$ ，求 $\triangle AMN$ 面积的最大值。

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(\sqrt{6}, 1)$ ，且离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 若直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点，且满足 $\angle AOB = 90^\circ$ (O 为坐标原点)，求 $|AB|$ 的取值范围。

9.

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，短轴长为 2，若点

A, B 分别是椭圆 E 的左、右顶点，动点 $M(a, t)$ ， $(t \geq \sqrt{2})$ ，直线 AM 交椭圆 E 于点 P 。

(1) 求椭圆 E 的方程。

(2)

① 求证： $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BP}$ 是定值。

② 设 $\triangle ABP$ 的面积为 S_1 ，四边形 $OBMP$ 的面积为 S_2 ，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值。

3. 中点弦问题

【解题思路】与弦中点相关的问题是圆锥曲线中常见问题，一般解决思路有两种，一是将直线与曲线联立，消去一个变量后建立二次方程，利用韦达定理求得中点坐标来进行求解；二是点差法，步骤一般为：①设点；②代入；③作差；④整理。下面的解法即是利用点差法来解决中点弦问题的例子。

常用“点差法”结论 (AB 为弦， M 为弦中点)：

(1) 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中，点差法结论为 $k_{OM} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$ ；

(2) 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中，点差法结论为 $k_{OM} \cdot k_{AB} = \frac{b^2}{a^2}$ ；

(3) 在抛物线 $y^2 = 2px$ 中，点差法结论为 $y_0 k_{AB} = p$ ；对于抛物线 $x^2 = 2py$ ，有 $x_0 = pk_{AB}$ 。

注意：“点差法”过程中要考虑 $k = 0$ 或 k 不存在的情况。

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2，且过点 $P(2, 0)$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设 F 为 C 的左焦点，点 M 为直线 $x = -4$ 上任意一点，过点 F 作 MF 的垂线交 C 于两点 A, B

① 证明： OM 平分线段 AB (其中 O 为坐标原点)。

② 当 $\frac{|MF|}{|AB|}$ 取最小值时，求点 M 的坐标。

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 4，其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形。

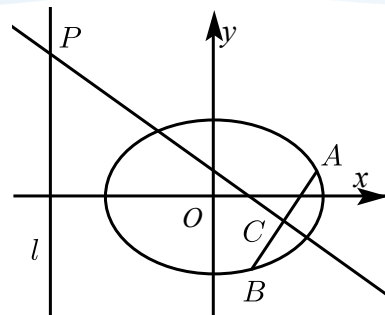
(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 设 F 为椭圆 C 的左焦点， T 为直线 $x = -3$ 上任意一点，过 F 作 TF 的垂线交椭圆 C 于点 P, Q

(i) 证明： OT 平分线段 PQ (其中 O 为坐标原点)；

(ii) 当 $\frac{|TF|}{|PQ|}$ 最小时，求点 T 的坐标。

12. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且右焦点 F 到左准线 l 的距离为 3。



(1) 求椭圆的标准方程.

(2) 过 F 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线分别交直线 l 和 AB 于点 P, C , 若 $PC = 2AB$, 求直线 AB 的方程.

13. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一个焦点为 $F(2, 0)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求椭圆方程.

(2) 斜率为 k 的直线 l 过点 F , 且与椭圆交于 A, B 两点, P 为直线 $x = 3$ 上的一点, 若 $\triangle ABP$ 为等边三角形, 求直线 l 的方程.

14. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点在直线 $l: x - 1 = 0$ 上, 且离心率 $e = \frac{1}{2}$.

(1) 求该椭圆的方程.

(2) 若 P 与 Q 是该椭圆上不同的两点, 且线段 PQ 的中点 T 在直线 l 上, 试证: x 轴上存在定点 R , 对于所有满足条件的 P 与 Q , 恒有 $|RP| = |RQ|$.

(3) 在 (2) 的条件下, $\triangle PQR$ 能否为等腰直角三角形? 并证明你的结论.

15. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 离心率等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 请解答下列各题:

① 直线 $l: y = kx + m (k \neq 0)$ 与椭圆 E 交于两点 A, B . 求 $|AB|$ 的弦长.

② 若直线 l 与椭圆 E 交于两点 A, B . 且线段 AB 的垂直平分线经过点 $(0, \frac{1}{2})$, 求 $\triangle AOB$ 的面积的最大值. (O 为原点)