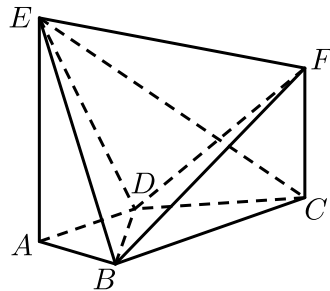


02空间向量习题

1. 空间向量在立体几何中的应用

1. 2019年高考真题天津卷理科第17题13分 ★★★

如图, $AE \perp$ 平面 $ABCD$, $CF \parallel AE$, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AB = AD = 1$, $AE = BC = 2$.



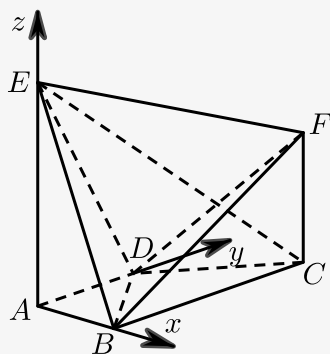
- (1) 求证: $BF \parallel$ 平面 ADE .
- (2) 求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值.
- (3) 若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 求线段 CF 的长.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $\frac{4}{9}$.

(3) 线段 CF 的长为 $\frac{8}{7}$.

【解析】(1) 依题意, 可以建立以 A 为原点, 分别以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴正方向的空间直角坐标系 (如图),



可得 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,2,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,2)$.

设 $CF = h (h > 0)$, 则 $F(1,2,h)$.

依题意, $\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$ 是平面 ADE 的法向量, 又 $\overrightarrow{BF} = (0,2,h)$,

可得 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$,

又因为直线 $BF \not\subset$ 平面 ADE ,

所以 $BF \parallel$ 平面 ADE .

(2) 依题意, $\overrightarrow{BD} = (-1,1,0)$, $\overrightarrow{BE} = (-1,0,2)$, $\overrightarrow{CE} = (-1,-2,2)$,

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 BDE 的法向量 ,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BE} = 0 \end{cases} ,$$

$$\text{即 } \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases} , \text{不妨令 } z = 1 ,$$

$$\text{可得 } \vec{n} = (2, 2, 1) ,$$

$$\text{因此有 } \left| \cos \langle \vec{CE}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{CE} \cdot \vec{n}|}{|\vec{CE}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{4}{9} .$$

故直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{4}{9}$.

(3) 设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 为平面 BDF 的法向量 ,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{BD} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{BF} = 0 \end{cases} , \text{即 } \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2y + hz = 0 \end{cases} ,$$

$$\text{不妨令 } y = 1 , \text{可得 } \vec{m} = \left(1, 1, -\frac{2}{h} \right) ,$$

$$\text{由题意, 有 } \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{\left| 4 - \frac{2}{h} \right|}{3 \sqrt{2 + \frac{4}{h^2}}} = \frac{1}{3} ,$$

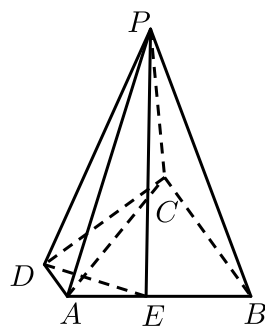
解得 $h = \frac{8}{7}$, 经检验, 符合题意 .

所以, 线段 CF 的长为 $\frac{8}{7}$.

【标注】【知识点】向量法解决线面角问题；向量法解决二面角问题

2. 2019~2020学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高二下学期期中第18题15分 ★★★

如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PC \perp$ 底面 $ABCD$, $PC = CD = 2$, E 为 AB 的中点底面 $ABCD$ 满足 $\angle ADC = \angle DCB = 90^\circ$, $AD = 1$, $BC = 3$.



(1) 求证：平面 $PDE \perp$ 平面 PAC ;

(2) 求直线 PC 与平面 PDE 所成角的正弦值 ;

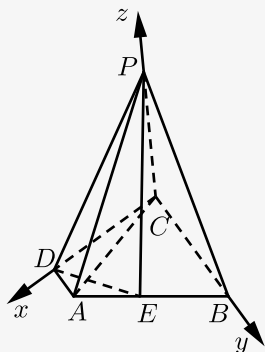
(3) 求二面角 $D-PE-B$ 的余弦值 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

$$(2) \frac{2}{3} .$$

$$(3) -\frac{4\sqrt{17}}{17}.$$

【解析】(1) 如图所示, 以点 C 为坐标原点,



直线 CD 、 CB 、 CP 分别为 x 、 y 、 z 轴, 建立空间直角坐标系,

$$C(0,0,0), A(2,1,0), B(0,3,0),$$

$$P(0,0,2), D(2,0,0), E(1,2,0),$$

$$\overrightarrow{DE} = (-1, 2, 0), \overrightarrow{CA} = (2, 1, 0), \overrightarrow{CP} = (0, 0, 2),$$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CA} = 0, \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CP} = 0,$$

$$\therefore DE \perp CA, DE \perp CP,$$

$$\because CP \cap CA = C,$$

$$\therefore DE \perp \text{平面 } PAC,$$

$$\therefore \text{平面 } PDE \perp \text{平面 } PAC.$$

(2) 设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 是平面 PDE 的一个法向量,

$$\overrightarrow{DE} = (-1, 2, 0), \overrightarrow{PE} = (1, 2, -2),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DE} = -1 + 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PE} = x + 2y - 2z = 0 \end{cases},$$

$$\text{取 } x = 2, \text{ 得 } \vec{n} = (2, 1, 2),$$

$$\text{设直线 } PC \text{ 与平面 } PDE \text{ 所成角为 } \alpha, \overrightarrow{CP} = (0, 0, 2),$$

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{CP}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{CP}|} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{直线 } PC \text{ 与平面 } PDE \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{2}{3}.$$

(3) 设平面 PDE 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\overrightarrow{EB} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{PB} = (0, 3, -2), \text{ 则}$$

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{EB} = -x + y = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 3y - 2z = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } x = 2, \text{ 得 } \vec{m} = (2, 2, 3),$$

$$\text{平面 } PDE \text{ 的法向量 } \vec{n} = (2, 1, 2),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{4\sqrt{17}}{17},$$

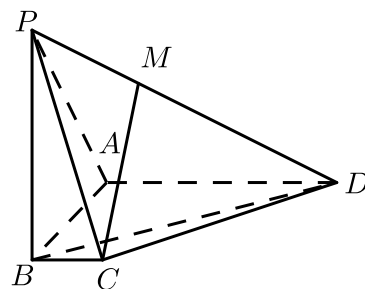
由图形得二面角 $D-PE-B$ 的平面角是钝角,

$$\therefore \text{二面角 } D-PE-B \text{ 的余弦值为 } -\frac{4\sqrt{17}}{17}.$$

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决异面直线所成角问题；向量法解决二面角问题；向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的垂直问题

3. 2019年天津河北区高三一模文科第17题13分 ★★★★★

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PB \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为梯形， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $PB = AB = AD = 3$ ， $BC = 1$ ， M 为棱 PD 上的点。

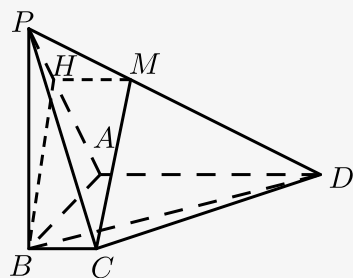


- (1) 若 $PM = \frac{1}{3}PD$ ，求证： $MC \parallel$ 平面 PAB 。
 (2) 求证：平面 $PAD \perp$ 平面 PAB 。
 (3) 求直线 BD 与平面 PAD 所成角的大小。

【答案】 (1) 证明见解析。
 (2) 证明见解析。
 (3) $\frac{\pi}{6}$ 。

【解析】 (1) 过点 M 作 $MH \parallel AD$ ，交 PA 于 H ，连接 BH 。

$$\begin{aligned} \because PM &= \frac{1}{3}PD, \\ \therefore HM &= \frac{1}{3}AD = BC, \\ \because MH &\parallel AD, AD \parallel BC, \\ \therefore HM &\parallel BC, \\ \therefore BCMH &\text{ 为平行四边形,} \\ \therefore CM &\parallel BH. \\ \therefore MC &\parallel \text{ 平面 } PAB. \end{aligned}$$



(2) $\because PB \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore AD \subset \text{平面 } ABCD$.

$\therefore PB \perp AD$.

$\therefore AD \perp AB$,

$\therefore AD \perp \text{平面 } PAB$.

$\therefore AD \subset \text{平面 } PAD$,

$\therefore \text{平面 } PAD \perp \text{平面 } PAB$.

(3) 以 B 为原点, BC, BA, BP 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

$\therefore C(1, 0, 0), D(3, 3, 0), A(0, 3, 0), P(0, 0, 3)$.

设平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{m} = (a, b, c)$.

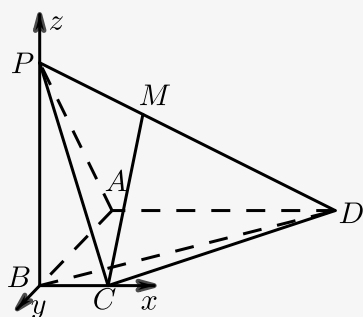
$\therefore \vec{PD} = (3, 3, -3), \vec{AP} = (0, -3, 3)$,

$\therefore \begin{cases} \vec{PD} \cdot \vec{m} = 0 \\ \vec{AP} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3x + 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$.

令 $y = 1$ 得 $\vec{m} = (0, 1, 1)$,

$\therefore \cos \langle \vec{BD}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{BD} \cdot \vec{m}}{|\vec{BD}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{1}{2}$,

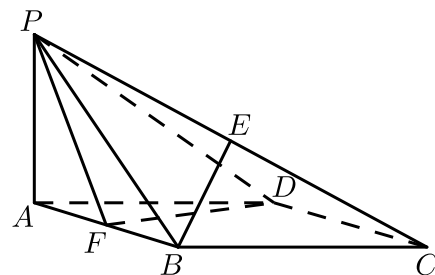
$\therefore$ 直线 BD 与平面 PAD 所成角为 $\frac{\pi}{6}$.



【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决线面角问题；线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；平面和平面垂直的判定；面面垂直的证明问题

4. 2018~2019学年10月天津河西区天津市实验中学高三上学期月考文科第17题 ★★★

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 2$, $PA = 1$. $PA \perp$ 平面 $ABCD$, E 是 PC 的中点, F 是 AB 的中点.



(1) 求证: $BE \parallel \text{平面 } PDF$.

(2) 求证: 平面 $PDF \perp$ 平面 PAB .

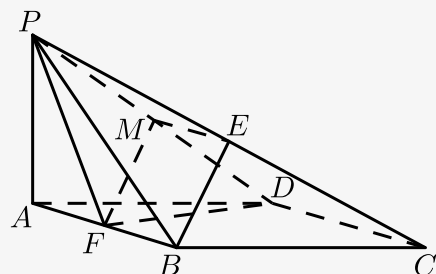
(3) 求直线 PA 与平面 PDF 所成角的大小 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

(3) 45° .

【解析】 (1) : 取 PD 中点 M ,



$\because E$ 是 PC 的中点 ,

$\therefore ME$ 是 $\triangle PCD$ 的中位线 ,

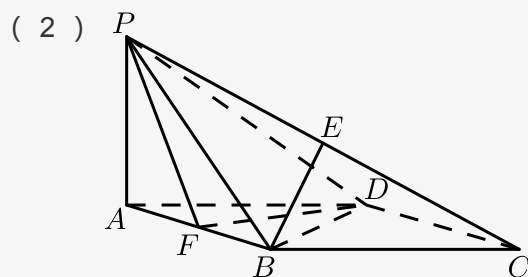
$\therefore ME \parallel FB$,

$\therefore$ 四边形 $MEBF$ 是平行四边形 ,

$\therefore BE \parallel MF$,

$\because BE \not\subset$ 平面 PDF , $MF \subset$ 平面 PDF ,

$\therefore BE \parallel$ 平面 PDF .



连接 BD , 得 $\triangle ABD$ 为等边三角形 ,

又 $\because F$ 为 AB 中点 ,

$\therefore DF \perp AB$,

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp DF$,

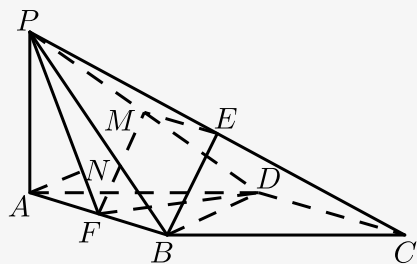
$\because$ 由 $PA \cap AB = A$,

$\therefore DF \perp$ 平面 PAB ,

$\because DF \subset$ 平面 PDF ,

$\therefore$ 平面 $PDF \perp$ 平面 PAB .

(3)



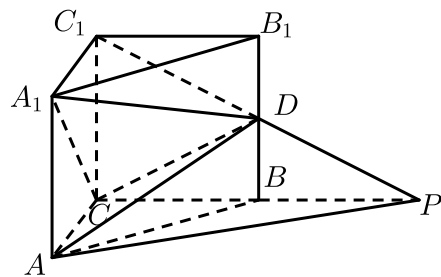
过点 A 作 $AN \perp PF$ 于点 N ,
 由 (2) 可知 , 面 $PDF \perp$ 平面 PAB , 交线为 PF ,
 $\therefore AN \subset$ 平面 PAF , $AN \perp PF$,
 $\therefore AH \perp$ 平面 PFD ,
 $\therefore PN$ 为 PA 在 PDF 上的射线 ,
 $\therefore \angle APN$ 为直线 PA 与平面 PDF 所成角 ,
 $\therefore F$ 为 AB 中点 ,
 $\therefore AF = \frac{1}{2}AB = 1$,
 $\therefore PA \perp$ 面 $ABCD$,
 在 $\text{Rt}\triangle PAF$ 中 , $\angle PAB = 90^\circ$, $PA = AF = 1$,
 $\therefore \angle APF = 45^\circ = \angle APN$,
 $\therefore \angle APN = 45^\circ$,
 $\therefore$ 直线 PA 与平面 PDF 所成角大小为 45° .

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；直线和平面垂直的判定；面面垂直的证明问题；平面和平面垂直的判定；几何法求空间角；向量法解决空间中的平行问题

2. 综合问题

5. 2019~2020 学年 5 月天津南开区天津市南开中学高三下学期月考第 17 题 15 分 ★★★

如图：在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中 , $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB = CC_1 = 1$, D 是棱 BB_1 上一点 , P 是 C_1D 的延长线与 CB 的延长线的交点 , 且 $AP \parallel$ 平面 A_1CD .



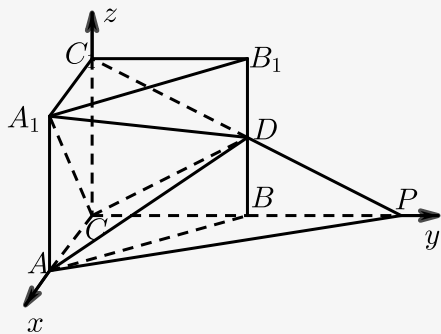
- (1) 求证 : $BD = B_1D$.
- (2) 求二面角 $C - A_1D - C_1$ 的正弦值 .
- (3) 若点 E 在线段 AP 上 , 且直线 A_1E 与平面 A_1CD 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{14}}{7}$, 求线段 AE 的长 .

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 1.

(3) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

【解析】(1) 以 C 为原点, CA, CB, CC_1 所在的直线分别为 x, y, z 轴, 建立图示的空间直角坐标系,



则 $C(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), A_1(1,0,1)$,

设 $BD = x$,

$\because BC \parallel B_1C_1$,

$$\therefore \frac{BP}{B_1C_1} = \frac{BD}{B_1D} = \frac{x}{1-x},$$

可设 $D(0,1,x)$, 则 $P\left(0, 1 + \frac{x}{1-x}, 0\right)$,

$$\therefore \overrightarrow{CA_1} = (1,0,1), \overrightarrow{CD} = (0,1,x), \overrightarrow{AP} = \left(-1, 1 + \frac{x}{1-x}, 0\right),$$

设平面 A_1CD 的一个法向量为 $\vec{n} = (a,b,c)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CA_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + cx = 0 \end{cases},$$

令 $a = 1$, 则 $\vec{n} = (1, x, -1)$,

$\because AP \parallel \text{平面 } A_1CD$,

$$\begin{aligned} \therefore \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} &= 1 \times (-1) + x \cdot \left(1 + \frac{x}{1-x}\right) + (-1) \times 0 \\ &= 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故 $BD = B_1D$,

综上所述, 命题得证.

(2) 由 (1) 知, 平面 A_1CD 的一个法向量为 $\vec{n} = \left(1, \frac{1}{2}, -1\right)$,

设平面 $A_1C_1D_1$ 的法向量 $\vec{m} = (x,y,z)$,

$$\overrightarrow{A_1C_1} = (-1,0,0), \overrightarrow{C_1D} = \left(0,1,-\frac{1}{2}\right),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{C_1D} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -x = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases},$$

令 $z = 1$, 则 $\vec{m} = (0, 2, 1)$,

$$\text{则 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = 0,$$

即二面角 $C - A_1D - C_1$ 为 $\frac{\pi}{2}$,

故二面角 $C - A_1D - C_1$ 的正弦值为 1 .

故答案为 : 1 .

$$(3) \because \overrightarrow{AP} = (-1, 2, 0) ,$$

$\therefore$ 可设 $E(1-m, 2m, 0) (0 \leq m \leq 1)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{A_1E} = (-m, 2m, -1) ,$$

又 $\because$ 直线 A_1E 与平面 A_1CD 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{14}}{7}$,

$$\text{则 } \sin \langle \overrightarrow{A_1E}, \vec{n} \rangle = \frac{\sqrt{14}}{7} , \cos \langle \overrightarrow{A_1E}, \vec{n} \rangle = \pm \frac{6}{7} ,$$

$$\text{又 } \because \vec{n} = \left(1, \frac{1}{2}, -1\right) ,$$

$$\text{即 } \frac{\overrightarrow{A_1E} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{A_1E}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5m^2+1} \cdot \frac{3}{2}} = \pm \frac{6}{7} ,$$

$$\text{解得 } m = \pm \frac{4\sqrt{10}}{45} ,$$

又 $\because m \geq 0$,

$$\therefore m = \frac{4\sqrt{10}}{45} ,$$

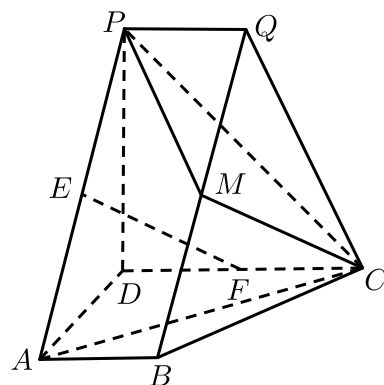
$$\therefore AE = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{10}}{45}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{10}}{45}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9} ,$$

故答案为 : $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决二面角问题；向量法求空间距离；向量法解决线面角问题

6. 2020~2021学年10月天津南开区天津市南开中学高三上学期月考第18题15分 ★★★★★

如图, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, $AB \parallel CD$, $PQ \parallel CD$, $AD = CD = DP = 2PQ = 2AB = 2$, 点 E, F, M 分别为 AP, CD, BQ 的中点.



(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 MPC .

(2) 求二面角 $Q - PM - C$ 的正弦值 .

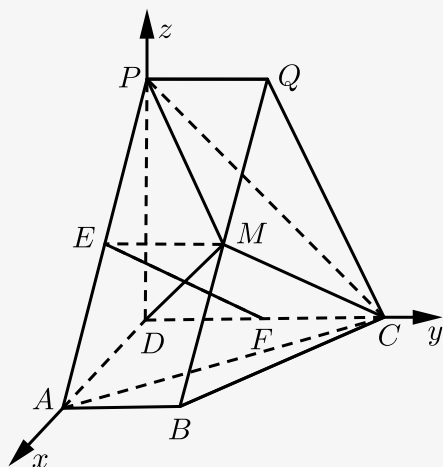
(3) 若 N 为线段 CQ 上的点, 且直线 DN 与平面 PMQ 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$, 求线段 QN 的长 .

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

【解析】(1) 连接 EM ,



因为 $AB \parallel CD$, $PQ \parallel CD$,

所以 $AB \parallel PQ$,

又因为 $AB = PQ$,

所以 $PABQ$ 为平行四边形. 由点 E 和 M 分别为 AP 和 BQ 的中点, 可

得 $EM \parallel AB$ 且 $EM = AB$,

因为 $AB \parallel CD$, $CD = 2AB$, F 为 CD 的中点,

所以 $CF \parallel AB$, 且 $CF = AB$, 可得 $EM \parallel CF$, 且 $EM = CF$, 即四边形 $EFCM$ 为平行四边形,

所以 $EF \parallel MC$, 又 $EF \not\subset$ 平面 MPC ,

$CM \subset$ 平面 MPC ,

所以 $EF \parallel$ 平面 MPC .

(2) 因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, 可以建立以 D 为原点, 分别以 $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DP}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向的空间直角坐标系.

依题意可得 $D(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(2,1,0)$, $C(0,2,0)$, $P(0,0,2)$, $Q(0,1,2)$, $M(1,1,1)$.

$$\overrightarrow{PM} = (1, 1, -1), \overrightarrow{PQ} = (0, 1, 0), \overrightarrow{CM} = (1, -1, 1), \overrightarrow{PC} = (0, 2, -2),$$

设 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$ 为平面 PMQ 的法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PM} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ 不妨设 } z = 1,$$

可得 $\vec{n}_1 = (1, 0, 1)$,

设 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$ 为平面 MPC 的法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}, \text{ 不妨设 } z = 1,$$

可得 $\vec{n}_2 = (0, 1, 1)$,

$$\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}, \text{ 于是 } \sin \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以, 二面角 $Q-PM-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) 设 $\vec{QN} = \lambda \vec{QC}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 即 $\vec{QN} = \lambda \vec{QC} = (0, \lambda, -2\lambda)$, 则 $N(0, \lambda+1, 2-2\lambda)$

从而 $\vec{DN} = (0, \lambda+1, 2-2\lambda)$,

由(2)知平面 PMQ 的法向量为 $\vec{n}_1 = (1, 0, 1)$.

$$\text{由题意, } \sin \frac{\pi}{6} = \left| \cos \langle \vec{DN}, \vec{n}_1 \rangle \right| = \frac{|\vec{DN} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{DN}| \cdot |\vec{n}_1|},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} = \frac{|2-2\lambda|}{\sqrt{(\lambda+1)^2 + (2-2\lambda)^2} \cdot \sqrt{2}},$$

整理得 $3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{3}$ 或 $\lambda = 3$,

因为 $0 \leq \lambda \leq 1$,

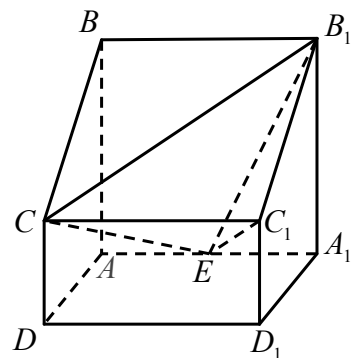
所以 $\lambda = \frac{1}{3}$,

所以, $\vec{ON} = \frac{1}{3} \vec{QC}$, $ON = \frac{1}{3} |\vec{QC}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

【标注】【知识点】直线的方向向量与平面的法向量；向量法求空间距离；向量法解决空间中的平行问题；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题

7. 2020~2021学年11月天津南开区天津市南开中学高三上学期月考(统练6)第19题12分 ★★★★★

如图, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $AB \perp AD$, $AD = CD = 1$, $AA_1 = AB = 2$, E 为棱 AA_1 的中点.



(1) 证明 $B_1C_1 \perp CE$.

(2) 求二面角 B_1-CE-C_1 的正弦值.

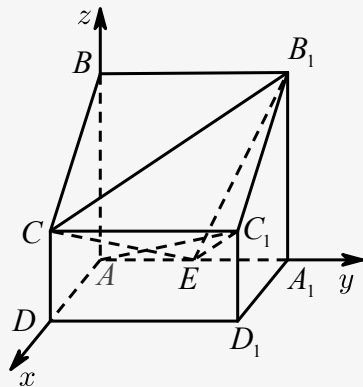
(3) 设点 M 在线段 C_1E 上, 且直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$, 求线段 AM 的长.

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$(3) \sqrt{2}.$$

【解析】(1) 以点 A 为原点建立空间直角坐标系，如图，



依题意得 $A(0,0,0)$, $B(0,0,2)$, $C(1,0,1)$, $B_1(0,2,2)$, $C_1(1,2,1)$, $E(0,1,0)$.

$$\text{则 } \overrightarrow{B_1C_1} = (1, 0, -1), \quad \overrightarrow{CE} = (-1, 1, -1),$$

$$\text{而 } \overrightarrow{B_1C_1} \cdot \overrightarrow{CE} = (1, 0, -1) \cdot (-1, 1, -1) = 0.$$

所以 $B_1C_1 \perp CE$.

$$(2) \overrightarrow{B_1C} = (1, -2, -1),$$

设平面 B_1CE 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } z = 1, \text{ 得 } x = -3, y = -2.$$

所以 $\vec{m} = (-3, -2, 1)$.

由(1)知 $B_1C_1 \perp CE$, 又 $CC_1 \perp B_1C_1$, 所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 CEC_1 ,

故 $\overrightarrow{B_1C_1} = (1, 0, -1)$, 为平面 CEC_1 的一个法向量,

$$\text{于是 } \cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{B_1C_1} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{B_1C_1}|} = \frac{-4}{\sqrt{14} \times \sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

$$\text{从而 } \sin \langle \vec{m}, \overrightarrow{B_1C_1} \rangle = \sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

所以二面角 $B_1 - CE - C_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

$$(3) \overrightarrow{AE} = (0, 1, 0), \quad \overrightarrow{EC_1} = (1, 1, 1),$$

$$\text{设 } \overrightarrow{EM} = \lambda \overrightarrow{EC_1} = (\lambda, \lambda, \lambda), \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

$$\text{有 } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = (\lambda, \lambda + 1, \lambda).$$

取 $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 2)$ 为平面 ADD_1A_1 的一个法向量,

设 θ 为直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成的角,

$$\text{则 } \sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (\lambda+1)^2 + \lambda^2 \times 2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + 2\lambda + 1}}.$$

$$\text{于是 } \frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + 2\lambda + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

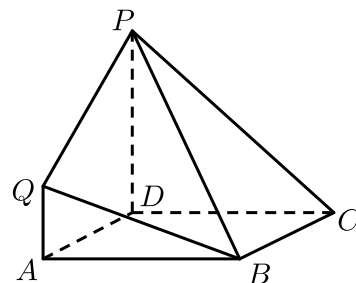
$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{3}. \text{ 所以 } |AM| = \left| \overrightarrow{AM} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{2}$$

所以线段 AM 的长为 $\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】向量法求空间距离；向量法解决异面直线所成角问题；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的垂直问题

8. 2019~2020学年3月天津静海区大邱庄中学高三下学期月考第17题15分 ★★★

在如图所示的几何体中，四边形 $ABCD$ 是正方形，四边形 $ADPQ$ 是梯形， $PD \parallel QA$ ， $\angle PDA = \frac{\pi}{2}$ ，平面 $ADPQ \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $AD = PD = 2QA = 2$.



- (1) 求证： $QB \parallel$ 平面 PDC .
- (2) 求二面角 $C-PB-Q$ 的大小.
- (3) 已知点 H 在棱 PD 上，且异面直线 AH 与 PB 所成角的余弦值为 $\frac{7\sqrt{3}}{15}$ ，求线段 DH 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

$$(2) \frac{5\pi}{6}.$$

$$(3) \frac{3}{2}.$$

【解析】 (1) $\because$ 正方形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$,

梯形 $ADPQ$ 中， $PD \parallel QA$,

$$AB \cap AQ = A, CD \cap PD = D,$$

$\therefore$ 平面 $ABQ \parallel$ 平面 PDC ,

又 $\because QB \not\subset$ 平面 ABQ ,

$\therefore QB \parallel$ 平面 PDC .

(2) 由题，建立以 D 为坐标原点，

以 DA, DC, DP 所在直线分别为 x, y, z 轴的空间直角坐标系，

$$\text{则 } C(0, 2, 0), P(0, 0, 2), B(2, 2, 0), Q(2, 0, 1),$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} = (2, 2, -2), \overrightarrow{CB} = (2, 0, 0), \overrightarrow{PQ} = (2, 0, -1),$$

分别设平面 PBC 与平面 PBQ 的法向量为 $\vec{m}$, $\vec{n}$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{PB} = 2x_1 + 2y_1 - 2z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{CB} = 2x_1 = 0 \end{cases},$$

取 $x_1 = 0$, $y_1 = 1$,

则 $\vec{m} = (0, 1, 1)$,

$$\text{同理 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PB} = 2x_2 + 2y_2 - 2z_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{PQ} = 2x_2 - z_2 = 0 \end{cases},$$

取 $x_2 = 1$, 则 $\vec{n} = (1, 1, 2)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

又 $\because$ 二面角 $C-PB-Q$ 为钝二面角,

$\therefore$ 二面角 $C-PB-Q$ 的大小为 $\frac{5\pi}{6}$.

(3) 设 $H(0, 0, h) (0 \leq h \leq 2)$,

则 $\vec{AH} = (-2, 0, h)$, $\vec{PB} = (2, 2, -2)$,

$$\therefore |\cos \langle \vec{PB}, \vec{AH} \rangle| = \left| \frac{\vec{PB} \cdot \vec{AH}}{|\vec{PB}| \cdot |\vec{AH}|} \right| = \frac{|-4 - 2h|}{\sqrt{4 + h^2} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{15},$$

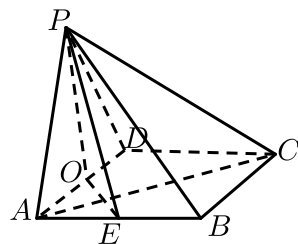
解得 $h = \frac{3}{2}$ 或 $h = \frac{8}{3}$ (舍),

$\therefore DH$ 的长为 $\frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】向量法解决异面直线所成角问题；向量法解决二面角问题；向量法解决线面角问题；线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定

9. 2019年天津和平区高三一模理科第17题13分 ★★★

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是菱形， $PO \perp$ 底面 $ABCD$. O 、 E 分别是 AD 、 AB 的中点， $AB = 6$, $AP = 5$, $\angle BAD = 60^\circ$.



(1) 求证： $AC \perp PE$.

(2) 求直线 PB 与平面 POE 所成角的正弦值.

(3) 在 DC 边上是否存在点 F , 使 BF 与 PA 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{3}}{10}$, 若存在, 确定点 F 的位置; 若不存在, 说明理由.

【答案】 (1) 证明见解析.

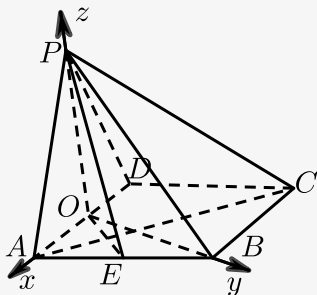
(2) $\frac{3\sqrt{129}}{86}$.

(3) 存在, F 为 DC 的中点.

【解析】(1) 连接 OB ,

由题意可知 OA, OB, OP 两两垂直,

以 O 为原点, OA 为 x 轴, OB 为 y 轴, OP 为 z 轴建立空间直角坐标系,



则 $O(0,0,0)$, $A(3,0,0)$, $B(0,3\sqrt{3},0)$, $C(-6,3\sqrt{3},0)$, $D(-3,0,0)$,

$E\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $P(0,0,4)$.

$\therefore \overrightarrow{AC} = (-9, 3\sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{PE} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, -4\right)$,

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PE} = -\frac{27}{2} + \frac{27}{2} + 0 = 0$,

$\therefore \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{PE}$, 即 $AC \perp PE$.

(2) 设平面 POE 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$\overrightarrow{OP} = (0, 0, 4)$, $\overrightarrow{OE} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{PB} = (0, 3\sqrt{3}, -4)$,

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{OP} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{OE} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z = 0 \\ \frac{3}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y = 0 \end{cases}$$

令 $y = 1$,

$\therefore \vec{m} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$,

设 PB 与平面 POE 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{PB} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} = \frac{3\sqrt{129}}{86}.$$

(3) 设存在点 F , $\overrightarrow{DF} = \lambda \overrightarrow{DC}$, $\lambda \in [0, 1]$,

可得 $F(-3-3\lambda, 3\sqrt{3}\lambda, 0)$, $\overrightarrow{BF} = (-3-3\lambda, 3\sqrt{3}\lambda-3\sqrt{3}, 0)$,

$\overrightarrow{PA} = (3, 0, -4)$, 设 PA 与 BF 所成角为 α ,

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{BF}| \cdot |\overrightarrow{PA}|} = \frac{|-9-9\lambda|}{5\sqrt{36(\lambda^2-\lambda+1)}} = \frac{3\sqrt{3}}{10},$$

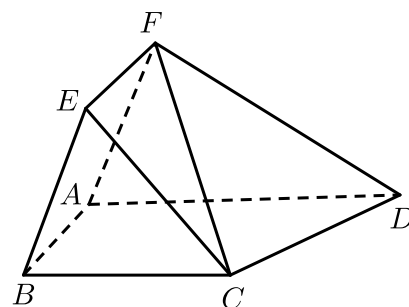
解得 $\lambda = \frac{1}{2}$,

$\therefore F$ 为 DC 的中点.

【标注】【知识点】向量法解决异面直线所成角问题；向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决空间中的垂直问题

10. 2019~2020学年10月天津和平区高三上学期月考第17题15分 ★★★

如图，四边形 $ABCD$ 为直角梯形， $BC \parallel AD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $BC = 2$ ， $AD = 3$ ，四边形 $ABEF$ 为平行四边形， $AB = 1$ ， $BE = 2$ ， $\angle EBA = 60^\circ$ ，平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$ 。

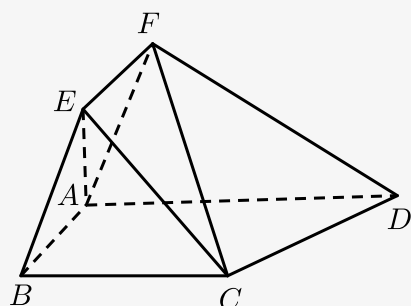


- (1) 求证： $AE \perp$ 平面 $ABCD$ 。
 (2) 求平面 $ABEF$ 与平面 FCD 所成锐二面角的余弦值。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

【解析】 (1) 连接 AE ，在 $\triangle ABE$ 内，



有 $AB = 1$ ， $BE = 2$ ，

$$\therefore \cos \angle EBA$$

$$= \frac{EB^2 + AB^2 - AE^2}{2 \cdot EB \cdot AB}$$

$$= \frac{4 + 1 - AE^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{1}{2},$$

$\therefore AE = \sqrt{3}$ ，即 $\triangle ABE$ 为直角三角形， $AE \perp AB$ ，

$\because$ 平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$ ，

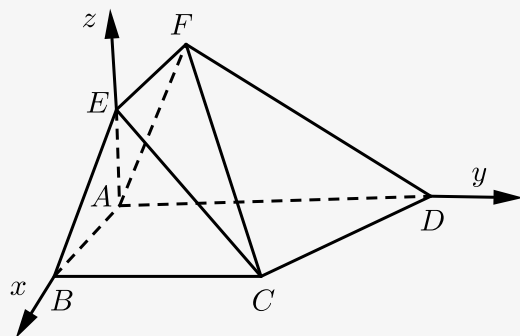
且平面 $ABEF \cap$ 平面 $ABCD = AB$ ，

$\therefore AE \perp$ 平面 $ABCD$ 。

(2) 由 (1) 知 $AE \perp$ 平面 $ABCD$ ，

$\therefore AE \perp AB$ ， $AE \perp AD$ ，

$\therefore$ 以点 A 为原点建立如图所示空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$, $D(0,3,0)$,

$C(1,2,0)$, $F(-1,0,\sqrt{3})$,

$\because$ 平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$,

且平面 $ABEF \cap$ 平面 $ABCD = AB$,

且 $AD \perp AB$,

$\therefore AD \perp$ 平面 $ABEF$,

$\therefore$ 取平面 $ABEF$ 法向量为 $\overrightarrow{AD} = (0,3,0)$,

$\therefore \overrightarrow{DC} = (1,-1,0)$, $\overrightarrow{CF} = (-1,-2,\sqrt{3})$,

$\therefore$ 设平面 FCD 法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = x - y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = -x - 2y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} ,$$

令 $x = 1$, 则 $\vec{n} = (1,1,\sqrt{3})$,

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AD} \rangle$$

$$= \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AD}|}$$

$$= \frac{3}{3 \cdot \sqrt{1+1+3}} = \frac{\sqrt{5}}{5} ,$$

$\therefore$ 平面 $ABEF$ 与平面 FCD 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【标注】【知识点】平面和平面垂直的性质；线面垂直的证明问题；向量法解决二面角问题