

02空间向量

1. 空间向量的定义与运算

🔔 定义

我们把在三维空间中具有大小和方向的向量叫做**空间向量**。

🔔 夹角定义

已知两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，在空间中任取一点 O ，作 $\vec{OA} = \vec{a}$ ， $\vec{OB} = \vec{b}$ ，则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记作 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ($\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [0, \pi]$)。

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$ ，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互相垂直，记作 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 。

🔔 数量积定义

空间中的两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，总可以把它们平移到一个平面内，把平面向量的数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 叫做两个空间向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的数量积。

🔔 线性运算与数量积

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，则容易得到：

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3) ;$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) ;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

🔔 平行垂直的判断

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，

$$(1) \vec{a} // \vec{b} \left(\vec{b} \neq 0 \right) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} ;$$

$$(2) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 .$$

请读者自行证明上面两个结论。

🔔 模长与夹角的计算

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，则

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} .$$

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} .$$

1. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一下学期期末第4题4分 ★★

已知向量 $\vec{a} = (0, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 0, 2)$, 若向量 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与向量 $\vec{a} - \vec{b}$ 互相垂直, 则 k 的值是 () .

- A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{7}{4}$

【答案】 D

【解析】 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$,
 $(k\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2k + 2k - 2 - 5 = 0$,
 $\therefore k = \frac{7}{4}$.

【标注】 【知识点】 向量法解决空间中的垂直问题; 向量法解决异面直线所成角问题

2. 2017~2018学年陕西西安未央区西安中学高二上学期期末理科平行班第6题5分 ★★

若平面 α 与 β 的法向量分别是 $\vec{a} = (2, 4, -3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 2)$, 则平面 α 与 β 的位置关系是 () .

- A. 平行 B. 垂直 C. 相交但不垂直 D. 无法确定

【答案】 B

【解析】 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, 4, -3) \cdot (-1, 2, 2)$
 $= -2 + 8 - 6 = 0$,
 $\therefore \vec{a} \perp \vec{b}$
 $\therefore$ 平面 α 与平面 β 垂直.
 故选 B.

【标注】 【知识点】 向量法解决二面角问题

3. 2020~2021学年10月天津河西区天津市新华中学高二上学期月考第11题4分 ★★

设 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 分别是平面 α , β 的法向量, $\vec{u} = (1, 2, -2)$, $\vec{v} = (-2, -4, m)$. 若 $\alpha // \beta$, 则实数 $m =$ _____ .

【答案】 4

【解析】 方法一: 成比例
 由 $\alpha // \beta$, 则有 $\frac{1}{-2} = \frac{2}{-4} = \frac{-2}{m}$, 所以 $m = 4$.
 故填 4.
 方法二: $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

由 $\alpha // \beta$, 则有 $\vec{v} = -2 \left(1, 2, \frac{-m}{2} \right) = -2\vec{u}$, 所以 $\frac{-m}{2} = -2$, 解得 $m = 4$.

故填 4 .

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题

4. 2019~2020学年江苏常州武进区江苏省前黄高级中学高二上学期期末第1题5分 ★

已知空间向量 $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (m, 1, 1)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则实数 $m = (\quad)$.

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】 C

【解析】 $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (m, 1, 1)$,

若 $\vec{a} \perp \vec{b}$,

则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,

即 $m - 1 = 0$, 即 $m = 1$.

故选 C .

【标注】【知识点】空间向量的数量积及其坐标表示

5. 2020~2021学年10月天津河西区天津市第四十二中学高二上学期月考第4题4分 ★★

已知 $\vec{AB} = (1, 5, -2)$, $\vec{BC} = (3, 1, z)$. 若 $\vec{AB} \perp \vec{BC}$, $\vec{BP} = (x - 1, y, -3)$, 且 $BP \perp$ 平面 ABC , 则实数 x , y , z 分别为 ($\quad$) .

A. $\frac{33}{7}$, $-\frac{15}{7}$, 4

B. $\frac{40}{7}$, $-\frac{15}{7}$, 4

C. $\frac{40}{7}$, -2 , 4

D. 4 , $\frac{40}{7}$, -15

【答案】 B

【解析】 $\because \vec{AB} \perp \vec{BC}$,

$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$,

即 $3 + 5 - 2z = 0$, 得 $z = 4$.

$BP \perp$ 平面 ABC ,

$\therefore BP \perp AB$, $BP \perp BC$,

又 $\vec{BC} = (3, 1, 4)$, $\vec{BC} \cdot \vec{BP} = 0$, $\vec{AB} \cdot \vec{BP} = 0$

则 $\begin{cases} (x-1) + 5y + 6 = 0 \\ 3(x-1) + y - 12 = 0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x = \frac{40}{7} \\ y = -\frac{15}{7} \end{cases}$.

【标注】【知识点】向量法解决空间中的垂直问题；向量法解决空间中的平行问题

6. 2018~2019学年天津河北区天津市第二中学高二下学期开学考试第8题 ★★

已知 A 点坐标是 $(-1, -2, 6)$, $B(1, 2, -6)$, O 为坐标原点, 则向量 $\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角是 ().

- A. 0 B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. $\frac{3\pi}{2}$

【答案】 C

【解析】 $\overrightarrow{OA} = (-1, -2, 6)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 2, -6)$,
 $\therefore \cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \frac{-1 - 4 - 36}{\sqrt{1+4+36} \cdot \sqrt{1+4+36}} = -1$,
 $\therefore \overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角为 π .
 故选 C.

【标注】 【知识点】 向量法解决异面直线所成角问题

2. 空间向量在立体几何中的应用

异面直线的夹角

直线 a, b 所成的角 θ 的余弦值为 $\frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|}$.

【备注】 两条异面直线 a 与 b 的方向向量 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$, 当 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角不大于 90° , 异面直线 a, b 所成的角 θ 与 $\vec{m}$ 和 $\vec{n}$ 的夹角相等; 当 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角大于 90° , 异面直线 a, b 所成的角与 $\vec{m}$ 和 $\vec{n}$ 的夹角互补.

直线和平面的夹角

直线与直线在平面内的射影所成的角称为 **直线与平面的夹角**.

直线与平面的夹角的取值范围是 $[0, \frac{\pi}{2}]$.

【备注】 若直线与平面垂直, 则直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$;
 若直线与平面平行, 则直线与平面的夹角为 0.

下面给出用向量运算求解直线 l 与平面 α 的夹角的步骤:

① 建立合理的空间直角坐标系;

② 求出直线的方向向量 $\overrightarrow{AB}$ 和平面 α 的法向量 $\vec{n}$;

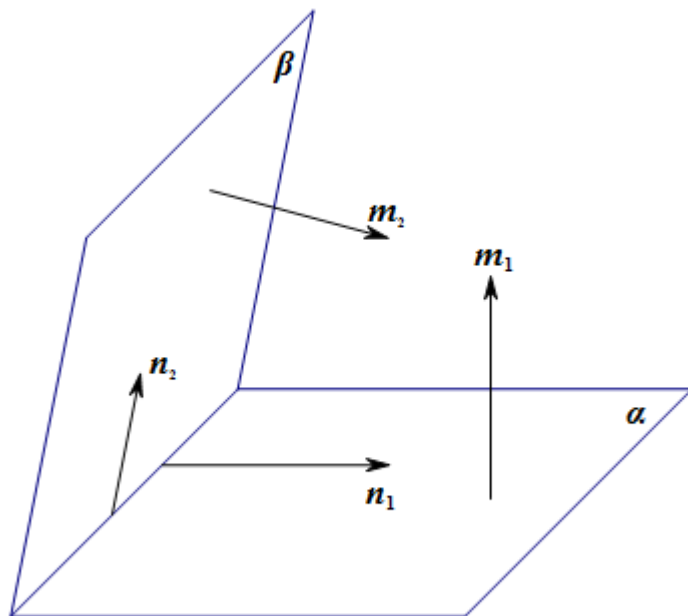
② 设直线与平面 α 的夹角为 θ ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$), 则 θ 由表达式 $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}|}$ 唯一确定.

平面和平面的夹角

在二面角 $\alpha - l - \beta$ 的棱 l 上任取一点 O ，在两个半平面 α 和 β 内分别作射线 $OA \perp l$ ， $OB \perp l$ ，则 $\angle AOB$ 叫做二面角 $\alpha - l - \beta$ 的**平面角**。

这样，二面角的大小就完全可以利用平面角来度量；二面角的取值范围是 $[0, \pi]$ ；平面角是直角的二面角叫做**直二面角**。

如下图：



分别在二面角 $\alpha - l - \beta$ 的面 α 、 β 内，作向量 $\vec{n}_1 \perp l$ ， $\vec{n}_2 \perp l$ ，则我们可以用向量 $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 的夹角来度量二面角。

设 $m_1 \perp \alpha$ ， $m_2 \perp \beta$ ，则 $\langle m_1, m_2 \rangle$ 与该二面角大小相等或互补。

据此，我们将求解二面角的问题转化为求解两个半平面法向夹角的问题。

点到平面的距离

过空间不在平面 α 内一点 O 做平面 α 的垂线，垂足为 A ，另过 O 作 OB 交 α 于 B ，且 OA 与 OB 不

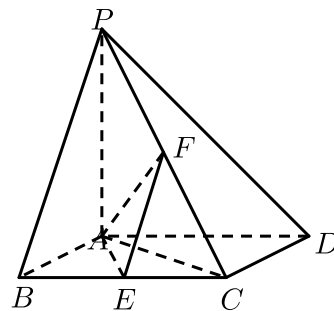
重合，设平面 α 的法向量为 $\vec{m}$ ， OB 与平面 α 所成的角为 θ ，则 $\sin \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{OB}|}{|\vec{m}| |\vec{OB}|}$ ，于是点 O 到平

面 α 的距离 $|OA| = |\vec{OB}| \cdot \sin \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{OB}|}{|\vec{m}|}$

异面直线所成角

7. 2019~2020 学年天津静海区高三上学期期中第19题16分 ★★★★★

如图，已知四棱锥 $P - ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为菱形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， E ， F 分别是 BC ， PC 的中点。



(1) 证明： $AE \perp PD$.

(2) 设 $AB = PA = 2$.

① 求异面直线 PB 与 AD 所成角的正弦值 .

② 求二面角 $E - AF - C$ 的余弦值 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

$$(2) \textcircled{1} \quad \frac{\sqrt{14}}{4} .$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\sqrt{15}}{5} .$$

【解析】 (1) 由四边形 $ABCD$ 为菱形， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

可得 $\triangle ABC$ 为正三角形，

因为 E 为 BC 的中点，

所以 $AE \perp BC$ ，

又 $BC \parallel AD$ ，

由此 $AE \perp AD$ ，

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AE \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PA \perp AE$ ，

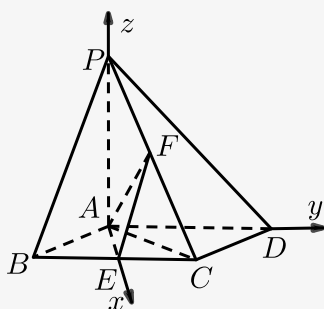
面 $PA \subset$ 平面 PAD ， $AD \subset$ 平面 PAD 且 $PA \cap AD = A$ ，

所以 $AE \perp$ 平面 PAD ，

又 $PD \subset$ 平面 PAD ，

所以 $AE \perp PD$.

(2) ① 由 (1) 知 AE ， AD ， AP 两两垂直，以 A 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



又 E, F 分别为 BC, PC 的中点,

所以 $A(0,0,0), B(\sqrt{3},-1,0), C(\sqrt{3},1,0), D(0,2,0), P(0,0,2),$

$E(\sqrt{3},0,0), F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right).$

$\overrightarrow{BP} = (-\sqrt{3},1,2), \overrightarrow{AD} = (0,2,0),$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AD} \rangle = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{BP}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-\sqrt{3} \times 0 + 1 \times 2 + 2 \times 0}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

设异面直线 PB 与 AD 所成角为 α ,

$$\therefore \sin \alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{AE} = (\sqrt{3},0,0), \overrightarrow{AF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right),$$

设平面 AEF 的一法向量为 $m = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \end{cases},$$

$$\text{因此} \begin{cases} \sqrt{3}x_1 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 + z_1 = 0 \end{cases},$$

取 $z_1 = -1$, 则 $m = (0, 2, -1)$,

因为 $BD \perp AC, BD \perp PA, PA \cap AC = A$,

所以 $BD \perp$ 平面 AFC ,

故 $\overrightarrow{BD}$ 为平面 AFC 的一法向量,

又 $\overrightarrow{BD} = (-\sqrt{3}, 3, 0)$,

$$\text{所以} \cos \langle m, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{m \cdot \overrightarrow{BD}}{|m| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{2 \times 3}{\sqrt{5} \times \sqrt{12}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

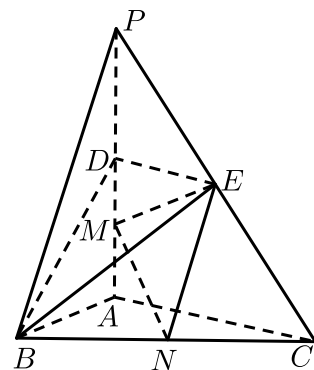
因为二面角 $E-AF-C$ 为锐角,

所以所求二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

【标注】【知识点】直线和平面垂直的判定；直线和平面垂直的性质；线线垂直的证明问题；向量法解决二面角问题；向量法解决异面直线所成角问题

8. 2016~2017学年北京海淀区清华大学附属中学高二下学期期末理科第17题14分 ★★★★★

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $\angle BAC = 90^\circ$. 点 D, E, N 分别为棱 PA, PC, BC 的中点, M 是线段 AD 的中点, $PA = AC = 4, AB = 2$.



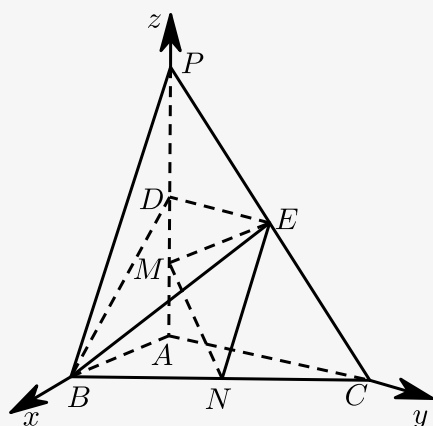
(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 BDE .

(2) 已知点 H 在棱 PA 上, 且直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{21}$, 求线段 AH 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{2}$.

【解析】 (1) 以 A 为坐标原点, 分别以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}$ 为 x , y , z 轴的正方向建立空间直角坐标系,



由题意可得 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,4,0)$, $P(0,0,4)$, $D(0,0,2)$, $E(0,2,2)$,
 $M(0,0,1)$, $N(1,2,0)$,

$\overrightarrow{DE} = (0,2,0)$, $\overrightarrow{DB} = (2,0,-2)$. 设 $\vec{n} = (x,y,z)$ 为平面 BDE 的一个法向量,

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 2y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases}$. 不妨设 $z = 1$, 可得 $\vec{n} = (1,0,1)$. 又

$\overrightarrow{MN} = (1,2,-1)$,

可得 $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = 1 + 0 - 1 = 0$.

因为 $MN \not\subset$ 平面 BDE , 所以 $MN \parallel$ 平面 BDE .

(2) 由题意可设 $AH = h (0 \leq h \leq 4)$, 则 $H(0,0,h)$,

所以 $\overrightarrow{NH} = (-1,-2,h)$, $\overrightarrow{BE} = (-2,2,2)$,

由已知得 $|\cos \langle \overrightarrow{NH}, \overrightarrow{BE} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{NH} \cdot \overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{NH}| \cdot |\overrightarrow{BE}|} = \frac{|2h - 2|}{\sqrt{h^2 + 4 + 1} \times \sqrt{4 + 4 + 4}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$,

整理得 $10h^2 - 21h + 8 = 0$,

解得 $h = \frac{8}{5}$ 或 $h = \frac{1}{2}$.
 所以线段 AH 的长为 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{2}$.

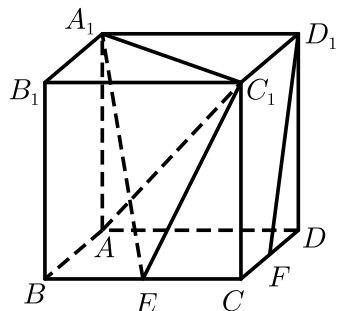
【标注】 【知识点】 向量法解决二面角问题；向量法解决异面直线所成角问题；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题

【素养】 数学运算

|| 线面角

9. 2021年高考真题天津卷第17题15分 ★★★

如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 BC 的中点， F 为棱 CD 的中点.

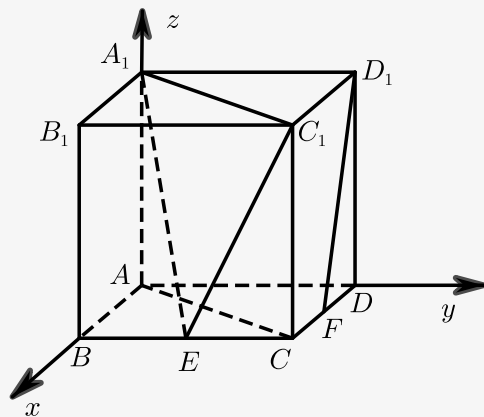


- (1) 求证： $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 .
 (2) 求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

【解析】 (1) 以 A 为原点，分别以 AB ， AD ， AA_1 所在直线为 x ， y ， z 轴，建立如图空间直角坐标系，



则 $A_1(0, 0, 2)$ ， $E(2, 1, 0)$ ， $C_1(2, 2, 2)$ ，

则 $\overrightarrow{A_1C_1} = (2, 2, 0)$ ， $\overrightarrow{EC_1} = (0, 1, 2)$ ，

设平面 A_1EC_1 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EC_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases},$$

故取 $\vec{n} = (2, -2, 1)$,

而 $F(1, 2, 0)$, $D_1(0, 2, 2)$, $\overrightarrow{FD_1} = (-1, 0, 2)$,

$\therefore \vec{n} \cdot \overrightarrow{FD_1} = 0$, 又 $D_1F \not\subset$ 平面 A_1EC_1 ,

故 $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 .

(2) 由(1)知平面 A_1EC_1 的法向量 $\vec{n} = (2, -2, 1)$, $\overrightarrow{AC_1} = (2, 2, 2)$,

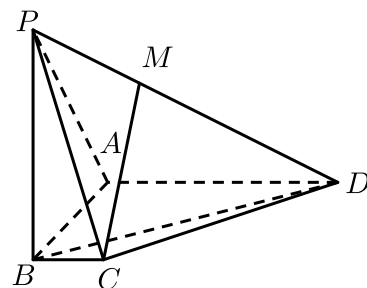
设直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AC_1} \rangle \right| = \frac{\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} \right|}{\left| \vec{n} \right| \cdot \left| \overrightarrow{AC_1} \right|} = \frac{2}{3 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；向量法解决线面角问题

10. 2019年天津河北区高三一模理科第17题13分 ★★

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PB \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为梯形, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, 且 $PB = AB = AD = 3$, $BC = 1$, M 为棱 PD 上的点.



(1) 若 $PM = \frac{1}{3}PD$, 求证: $MC \parallel$ 平面 PAB .

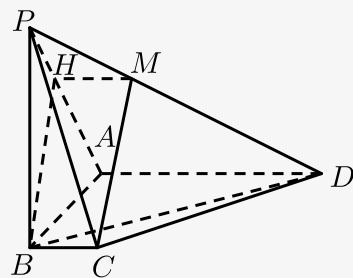
(2) 求直线 BD 与平面 PAD 所成角的大小.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $\frac{\pi}{6}$.

【解析】 (1) 过 M 作 $MH \parallel AD$ 交 PA 于 H ,

连接 BH ,



$\therefore PM = \frac{1}{3}PD$,

$$\therefore HM = \frac{1}{3}AD = BC,$$

又 $\because MH \parallel AD, AD \parallel BC,$

$$\therefore \underline{MH \parallel BC},$$

$\therefore$ 四边形 $BCMH$ 为平行四边形,

$$\therefore CM \parallel BH,$$

又 $\because BH \subset$ 面 $PAB, CM \not\subset$ 面 $PAB,$

$$\therefore CM \parallel \text{面 } PAB.$$

(2) $\because$ 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AD \perp AB,$

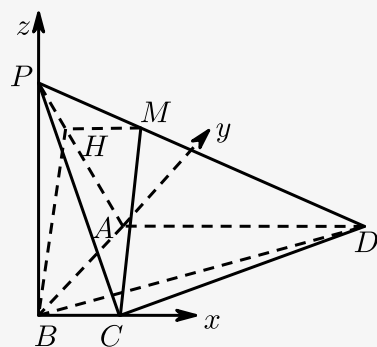
$$\therefore BC \perp AB,$$

又 $\because PB \perp$ 面 $ABCD,$

$AB \subset$ 面 $ABCD, BC \subset$ 面 $ABCD,$

$$\therefore PB \perp AB, PB \perp BC,$$

故以 B 为原点, BC, BA, BP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,



$$\therefore C(1, 0, 0), D(3, 3, 0), A(0, 3, 0), P(0, 0, 3),$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = (3, 3, 0), \overrightarrow{AD} = (3, 0, 0), \overrightarrow{PA} = (0, 3, -3),$$

设面 PAD 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z),$

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 3x = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PA} = 3y - 3z = 0 \end{cases},$$

令 $y = 1$ 得 $z = 1,$

$$\therefore \vec{n} = (0, 1, 1),$$

$$\therefore \sin \alpha = |\cos \theta| = \left| \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{BD}| \cdot |\vec{n}|} \right|$$

$$= \left| \frac{3 \times 1}{\sqrt{18} \times \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2},$$

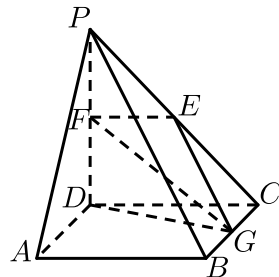
$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore BD \text{ 与面 } PAD \text{ 所成角为 } \frac{\pi}{6}.$$

【标注】【知识点】直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题；向量法解决二面角问题；向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的平行问题

11. 2018~2019学年天津和平区高三上学期期末文科第17题13分 ★★★

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PD = AB = 2$ ，点 E 、 F 、 G 分别为 PC 、 PD 、 BC 的中点。



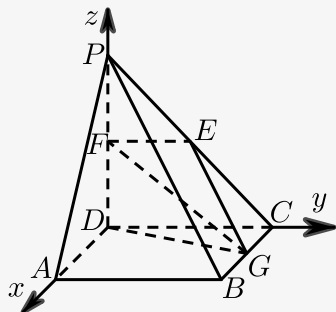
- (1) 求证： $PA \perp EF$ 。
 (2) 求证： $FG \parallel$ 平面 PAB 。
 (3) 求二面角 $D-FG-E$ 的余弦值。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

(3) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。

【解析】(1) 以 D 为原点，建立如图所示空间直角坐标系 $D-xyz$ ，



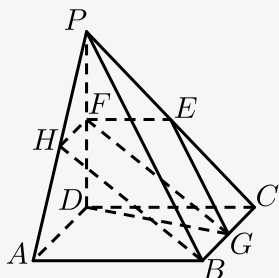
$$F(0, 0, 1), E(0, 1, 1), P(0, 0, 2), A(2, 0, 0), G(1, 2, 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} = (2, 0, -2), \overrightarrow{EF} = (0, -1, 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{EF} = (2, 0, -2) \cdot (0, -1, 0) = 0,$$

$$\therefore PA \perp EF.$$

(2) 作 PA 中点 H ，连接 FH ， BH ，



$\because H, F$ 分别为 PD, PA 中点,

$$\therefore HF \parallel \frac{1}{2}AD,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore HF \parallel \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore HF \parallel BG,$$

$\therefore$ 四边形 $HFG B$ 为平行四边形,

$$\therefore FG \parallel HB,$$

$$\therefore FG \parallel \text{面 } PAB.$$

$$(3) \because \overrightarrow{DF} = (0, 0, 1), \overrightarrow{EF} = (0, -1, 0), \overrightarrow{FG} = (1, 2, -1),$$

设面 DFG 法向量为 $\vec{m}(x_1, y_1, z_1)$,

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{FG} = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \vec{m} = (-2, 1, 0),$$

设面 EFG 法向量 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{FG} = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \vec{n} = (1, 0, 1),$$

$$\therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \left| \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} \right| = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

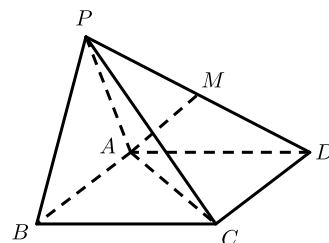
又 $\because$ 二面角 $D-FG-E$ 为钝角,

$$\therefore \text{余弦值为 } -\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；向量法解决异面直线所成角问题；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的垂直问题

12. 2018~2019学年天津滨海新区高三上学期期末理科七校联考第17题13分 ★★★

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， $\triangle PAB$ 是等边三角形，点 M 是 PD 的中点。



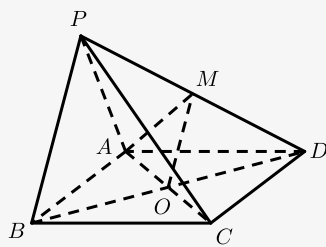
(1) 求证： $PB \parallel$ 平面 MAC 。

(2) 求二面角 $B-PC-D$ 的余弦值。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 余弦值为 $-\frac{\sqrt{7}}{7}$.

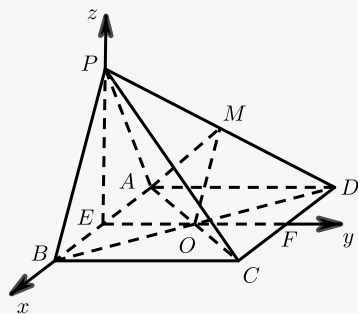
【解析】(1) 连接 AC , BD , 交于 O , 连接 OM ,



$\therefore$ 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,
平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$,
 $\triangle PAB$ 是等边三角形, M 是 PD 中点,
 $\therefore OM \parallel PB$,
 $\therefore OM \subset$ 平面 MAC , $PB \not\subset$ 平面 MAC ,
 $\therefore PB \parallel$ 平面 MAC .

(2) 取 AB 中点 E , CD 中点 F , 连接 EF ,

以 E 为原点, EB , EF , EP 分别为 x , y , z 轴建立空间直角坐标系,



则 $B(1, 0, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{3})$, $C(1, 2, 0)$, $D(-1, 2, 0)$,
 $\overrightarrow{PB} = (1, 0, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{PC} = (1, 2, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{PD} = (-1, 2, -\sqrt{3})$,

设平面 PBC 法向量为 $\vec{n}(x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} = x - \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = x + 2y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 1),$$

设平面 PBD 法向量为 $\vec{m}(x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PC} = x + 2y - \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PD} = -x + 2y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases},$$

$$\text{则 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{7}}{7},$$

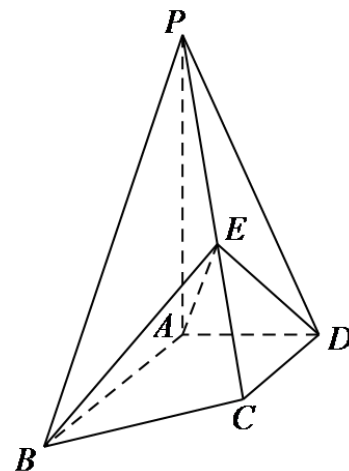
$\therefore$ 二面角 $B-PC-D$ 为钝角,

$\therefore$ 二面角 $B-PC-D$ 余弦值为 $-\frac{\sqrt{7}}{7}$.

【标注】【知识点】向量法求空间距离；向量法解决二面角问题；线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定

13. 2018~2019学年天津南开区高三上学期期末理科第17题10分 ★★★

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB \parallel DC$ ， $DA \perp AB$ ， $AB = AP = 2$ ， $DA = DC = 1$ ， E 为 PC 上一点，且 $PE = \frac{2}{3}PC$ 。



- (1) 求 PE 的长。
 (2) 求证： $AE \perp$ 平面 PBC 。
 (3) 求二面角 $B-AE-D$ 的度数。

【答案】 (1) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 。

(2) 证明见解析。

(3) 120° 。

【解析】 (1) $\because$ 四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB \parallel DC$ ， $DA \perp AB$ ，

$AB = AP = 2$ ， $DA = DC = 1$ ， E 为 PC 上一点，

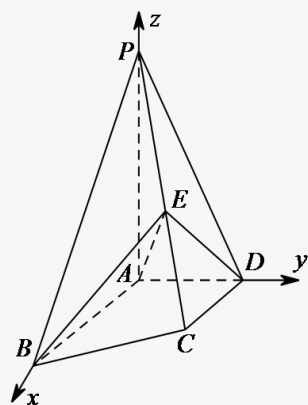
且 $PE = \frac{2}{3}PC$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{2}，$$

$$\therefore PC = \sqrt{PA^2 + AC^2} = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}，$$

$$\therefore PE = \frac{2}{3}PC = \frac{2\sqrt{6}}{3}。$$

(2) 以 A 为原点， AB 为 x 轴， AD 为 y 轴， AP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，



$$\begin{aligned} & \text{则 } A(0,0,0), C(1,1,0), P(0,0,2), E\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), B(2,0,0), \\ & \overrightarrow{AE} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \overrightarrow{PB} = (2,0,-2), \overrightarrow{PC} = (1,1,-2), \\ & \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0, \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = 0, \\ & \therefore AE \perp PB, AE \perp PC, \end{aligned}$$

$$\text{又 } PB \cap PC = P,$$

$$\therefore AE \perp \text{平面 } PBC.$$

$$(3) D(0,1,0), \overrightarrow{AB} = (2,0,0), \overrightarrow{AD} = (0,1,0), \overrightarrow{AE} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\text{设平面 } ABE \text{ 的法向量 } \vec{n} = (x, y, z),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2x = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases}, \text{取 } y = 1, \text{得 } \vec{n} = (0, 1, -1),$$

$$\text{设平面 } ADE \text{ 的法向量 } \vec{m} = (a, b, c),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AD} = b = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c = 0 \end{cases}, \text{取 } a = 1, \text{得 } \vec{m} = (1, 0, -1),$$

$$\text{设二面角 } B-AE-D \text{ 的度数为 } \theta,$$

$$\text{则 } \cos(\pi - \theta) = \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \theta = 120^\circ,$$

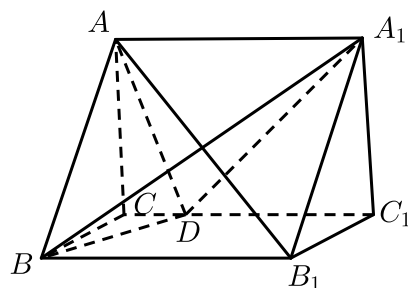
$$\therefore \text{二面角 } B-AE-D \text{ 的度数为 } 120^\circ.$$

【标注】【知识点】向量法解决空间中的垂直问题；向量法解决二面角问题；向量法求空间距离；
向量法解决空间中的平行问题

|| 空间中的距离

14. 2019~2020学年天津南开区高三上学期期末第17题14分 ★★★

如图，已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AA_1 = AB = 2BC = 2$ ， $\overrightarrow{DC_1} = 3\overrightarrow{CD}$ 。



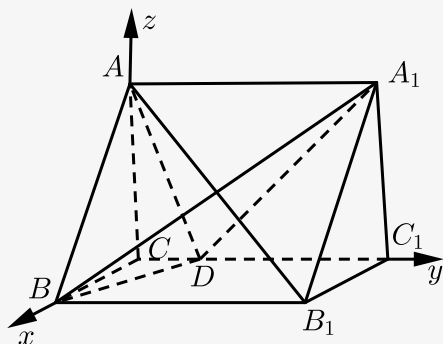
(1) 求证： $AB_1 \perp \text{平面 } A_1BD$ 。

(2) 求点 B_1 到平面 A_1BD 的距离。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $\sqrt{2}$.

【解析】(1) 由直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面是直角三角形，且 $\angle ACB = 90^\circ$ ，则 CB ， CC_1 ， CA 两两垂直，以 C 为坐标原点， CB ， CC_1 ， CA 所在直线为 x ， y ， z 轴建立如图所示空间直角坐标系：



$$C(0,0,0), A(0,0,\sqrt{3}), B(1,0,0), C_1(0,2,0), B_1(1,2,0), D\left(0,\frac{1}{2},0\right),$$

$$A_1(0,2,\sqrt{3}),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AB_1} = (1,2,-\sqrt{3}), \overrightarrow{DB} = \left(1,-\frac{1}{2},0\right), \overrightarrow{DA_1} = \left(0,\frac{3}{2},\sqrt{3}\right),$$

$$\text{设平面 } A_1BD \text{ 的法向量为 } \vec{n} = (x,y,z), \overrightarrow{B_1B} = (0,-2,0),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{DB} \cdot \vec{n} = x - \frac{1}{2}y = 0 \\ \overrightarrow{DA_1} \cdot \vec{n} = 2y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } y = 2, \text{ 则 } x = 1, z = -\sqrt{3},$$

$$\vec{n} = (1,2,-\sqrt{3}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AB_1} // \vec{n},$$

$$\therefore AB_1 \perp \text{平面 } A_1BD.$$

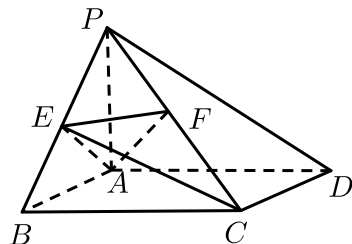
(2) 设点 B_1 到平面 A_1BD 的距离为 d ,

$$\text{则 } d = \frac{|\overrightarrow{B_1B} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】向量法求空间距离；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决空间中的垂直问题

15. 2020~2021学年10月天津和平区天津市第一中学高三上学期月考第18题 ★★★

如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 是矩形， $PA = AB = 2$ ， $AD = 4$ ， E 是 PB 的中点， $AF \perp PC$ ，垂足为 F 。



(1) 证明: $PD \parallel$ 平面 ACE .

(2) 求点 F 到平面 PAB 的距离.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $\frac{2}{3}$.

【解析】(1) $\because PA \perp$ 面 $ABCD$,

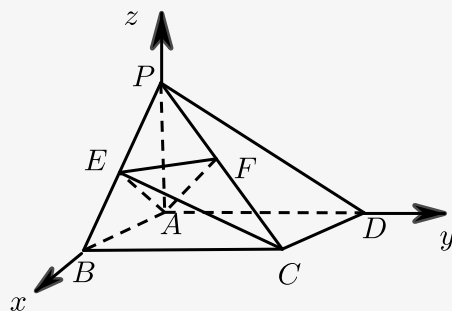
$AB \subset$ 面 $ABCD$,

$AD \subset$ 面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp AB$,

$PA \perp AD$,

以 $\overrightarrow{AB}$ 为 x 轴, $\overrightarrow{AD}$ 为 y 轴, $\overrightarrow{AP}$ 为 z 轴建系如图,



$A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $D(0,4,0)$, $C(2,4,0)$, $P(0,0,2)$, $E(1,0,1)$,

$\overrightarrow{PD} = (0,4,-2)$,

$\overrightarrow{AC} = (2,4,0)$, $\overrightarrow{AE} = (1,0,1)$,

设面 ACE 法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{AE} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases},$$

令 $x = 2$ 得 $\vec{m} = (2, -1, -2)$,

$\therefore \overrightarrow{PD} \cdot \vec{m} = 0 - 4 + 4 = 0$,

$PD \not\subset$ 面 ACE ,

$\therefore PD \parallel$ 面 ACE .

(2) 设 $\overrightarrow{CF} = \lambda \overrightarrow{CP}$,

即 $\overrightarrow{CF} = \lambda(-2, -4, 2) = (-2\lambda, -4\lambda, 2\lambda)$,

$F(2-2\lambda, 4-4\lambda, 2\lambda)$,

$\overrightarrow{AF} = (2-2\lambda, 4-4\lambda, 2\lambda)$,

$\overrightarrow{CP} = (-2, -4, 2)$,

$\therefore AF \perp CP$,

$\therefore \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$,

解得 $\lambda = \frac{5}{6}$,

$$\text{即 } F\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right),$$

$$|y_F| = \frac{2}{3},$$

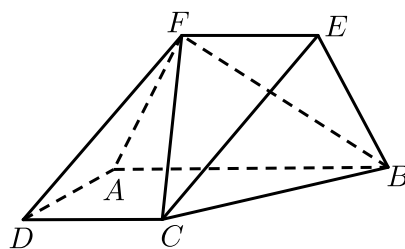
$$\text{故点 } F \text{ 到平面 } PAB \text{ 的距离为 } \frac{2}{3}.$$

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法求空间距离；向量法解决二面角问题

3. 综合问题（动点问题）

16. 2018~2019学年12月辽宁沈阳沈河区沈阳市第二中学高三上学期月考理科第19题12分 ★★★★★

如图，梯形 $ABCD$ 所在的平面与等腰梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直， $AB \parallel CD \parallel EF$ ， $AB \perp AD$ ， $CD = DA = AF = FE = 2$ ， $AB = 4$ 。



- (1) 求证： $DF \parallel$ 平面 BCE 。
- (2) 求二面角 $C - BF - A$ 的余弦值。
- (3) 线段 CE 上是否存在点 G ，使得 $AG \perp$ 平面 BCF ？请说明理由。

【答案】(1) 证明见解析。

$$(2) \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

(3) 不存在，理由见解析。

【解析】(1) 因为 $CD \parallel EF$ ，且 $CD = EF$ ，所以 四边形 $CDFE$ 为平行四边形，

所以 $DF \parallel CE$ 。因为 $DF \not\subset$ 平面 BCE ，

所以 $DF \parallel$ 平面 BCE 。

(2) 在平面 $ABEF$ 内，过 A 作 $Az \perp AB$ 。

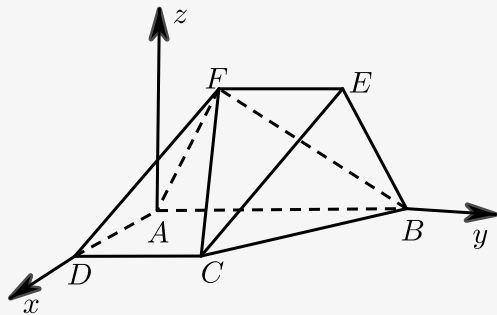
因为 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$ ，平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABEF = AB$ ，

又 $Az \subset$ 平面 $ABEF$ ， $Az \perp AB$ ，

所以 $Az \perp$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $AD \perp AB$ ， $AD \perp Az$ ， $Az \perp AB$ 。

如图建立空间直角坐标系 $A - xyz$ 。



由题意得, $A(0,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(2,2,0)$, $E(0,3,\sqrt{3})$, $F(0,1,\sqrt{3})$.

所以 $\overrightarrow{BC} = (2, -2, 0)$, $\overrightarrow{BF} = (0, -3, \sqrt{3})$.

设平面 BCF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ -3y + \sqrt{3}z = 0. \end{cases}$$

令 $y = 1$, 则 $x = 1$, $z = \sqrt{3}$, 所以 $\vec{n} = (1, 1, \sqrt{3})$.

平面 ABF 的一个法向量为 $\vec{v} = (1, 0, 0)$,

$$\text{则 } \cos \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{|\vec{n}| |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

所以二面角 $C-BF-A$ 的余弦值 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(3) 线段 CE 上不存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF , 理由如下:

解法一: 设平面 ACE 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2x_1 + 2y_1 = 0, \\ 3y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0. \end{cases}$$

令 $y_1 = 1$, 则 $x_1 = -1$, $z_1 = -\sqrt{3}$, 所以 $\vec{m} = (-1, 1, -\sqrt{3})$.

因为 $\vec{m} \cdot \vec{n} \neq 0$,

所以平面 ACE 与平面 BCF 不可能垂直,

从而线段 CE 上不存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF .

解法二: 线段 CE 上不存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF , 理由如下:

假设线段 CE 上存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF ,

设 $\overrightarrow{CG} = \lambda \overrightarrow{CE}$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$.

设 $G(x_2, y_2, z_2)$, 则有 $(x_2 - 2, y_2 - 2, z_2) = (-2\lambda, \lambda, \sqrt{3}\lambda)$,

所以 $x_2 = 2 - 2\lambda$, $y_2 = 2 + \lambda$, $z_2 = \sqrt{3}\lambda$, 从而 $G(2 - 2\lambda, 2 + \lambda, \sqrt{3}\lambda)$,

所以 $\overrightarrow{AG} = (2 - 2\lambda, 2 + \lambda, \sqrt{3}\lambda)$.

因为 $AG \perp$ 平面 BCF , 所以 $AG \parallel \vec{n}$.

$$\text{所以有 } \frac{2 - 2\lambda}{1} = \frac{2 + \lambda}{1} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3}},$$

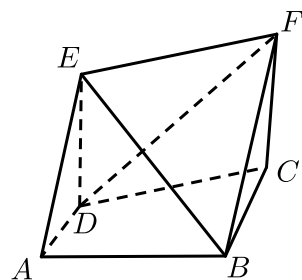
因为上述方程组无解, 所以假设不成立.

所以线段 CE 上不存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF .

【标注】【知识点】线面平行的证明问题; 直线和平面平行的判定; 向量法解决空间中的垂直问

17. 2020年天津南开区天津市第二十五中学高三下学期高考模拟（3月）第17题 ★★★

如图所示，直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = BC = 2AD = 2$ ，四边形 $EDCF$ 为矩形， $CF = \sqrt{3}$ ，平面 $EDCF \perp$ 平面 $ABCD$ 。



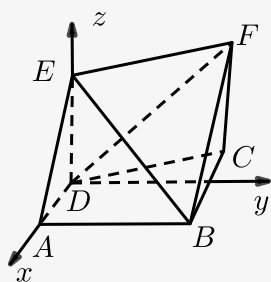
- (1) 求证： $DF \parallel$ 平面 ABE 。
- (2) 求平面 ABE 与平面 EFB 所成锐二面角的余弦值。
- (3) 在线段 DF 上是否存在点 P ，使得直线 BP 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，若存在，求出线段 BP 的长，若不存在，请说明理由。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $\frac{5\sqrt{31}}{31}$ 。

(3) $|\overrightarrow{BP}| = 2$ 。

【解析】(1) 取 D 为原点， DA 所在直线为 x 轴， DE 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系，如图所示；



则 $A(1, 0, 0)$ ， $B(1, 2, 0)$ ， $E(0, 0, \sqrt{3})$ ， $F(-1, 2, \sqrt{3})$ ，

$\overrightarrow{BE} = (-1, -2, \sqrt{3})$ ， $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$ ，

设平面 ABE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\therefore \begin{cases} -x - 2y + \sqrt{3}z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

不妨设 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 1)$ ，

又 $\overrightarrow{DF} = (-1, 2, \sqrt{3})$ ，

$\therefore \overrightarrow{DF} \cdot \vec{n} = -\sqrt{3} + 0 + \sqrt{3} = 0$ ，

$\therefore \overrightarrow{DF} \perp \vec{n}$ ；

又 $\because DF \not\subset$ 平面 ABE ，

$\therefore DF \parallel \text{平面 } ABE$.

$$(2) \because \overrightarrow{BE} = (-1, -2, \sqrt{3}), \overrightarrow{BF} = (-2, 0, \sqrt{3}),$$

设平面 BEF 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\therefore \begin{cases} -x - 2y + \sqrt{3}z = 0 \\ -2x + \sqrt{3}z = 0 \end{cases},$$

$$\text{则 } \vec{m} = (2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 4),$$

$$\therefore |\cos \theta| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{10}{2 \times \sqrt{31}} = \frac{5\sqrt{31}}{31},$$

$\therefore$ 平面 ABE 与平面 EFB 所成锐二面角的余弦值是 $\frac{5\sqrt{31}}{31}$.

$$(3) \text{ 设 } \overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DF} = \lambda(-1, 2, \sqrt{3}) = (-\lambda, 2\lambda, \sqrt{3}\lambda), \lambda \in [0, 1];$$

$$\therefore P(-\lambda, 2\lambda, \sqrt{3}\lambda), \overrightarrow{BP} = (-\lambda - 1, 2\lambda - 2, \sqrt{3}\lambda),$$

又平面 ABE 的法向量为 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 1)$,

$$\begin{aligned} \therefore \sin \theta &= \left| \cos \langle \overrightarrow{BP}, \vec{n} \rangle \right| = \left| \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{BP}| \cdot |\vec{n}|} \right| \\ &= \frac{|\sqrt{3}(-\lambda - 1) + \sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{(-\lambda - 1)^2 + (2\lambda - 2)^2 + (\sqrt{3}\lambda)^2} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \end{aligned}$$

化简得 $8\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$,

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 $\lambda = \frac{1}{4}$;

$$\text{当 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 时, } \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \therefore |\overrightarrow{BP}| = 2;$$

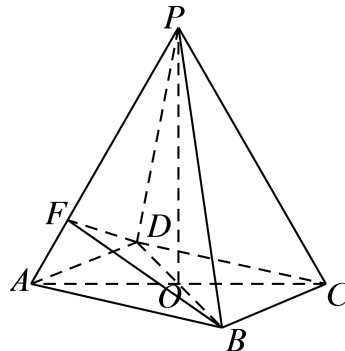
$$\text{当 } \lambda = \frac{1}{4} \text{ 时, } \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \therefore |\overrightarrow{BP}| = 2;$$

综上, $|\overrightarrow{BP}| = 2$.

【标注】【知识点】直线的方向向量与平面的法向量；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法求空间距离

18. 2018~2019学年北京东城区北京市第五中学高二上学期期中第19题 ★★★

如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC \cap BD = O$, $\triangle PAC$ 是边长为 2 的等边三角形, $PB = PD = \sqrt{6}$, $AP = 4AF$.



- (1) 求证: $PO \perp$ 底面 $ABCD$.
- (2) 求直线 CP 与平面 BDF 所成角的大小 .
- (3) 在线段 PB 上是否存在一点 M , 使得 $CM \parallel$ 平面 BDF ? 如果存在, 求 $\frac{BM}{BP}$ 的值, 如果不存在, 请说明理由 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 30° .

(3) 存在, 此时 $\frac{BM}{BP} = \frac{1}{3}$.

【解析】 (1) 因为底面 $ABCD$ 是菱形, $AC \cap BD = O$,

所以 O 为 AC, BD 中点 .

又因为 $PA = PC, PB = PD$,

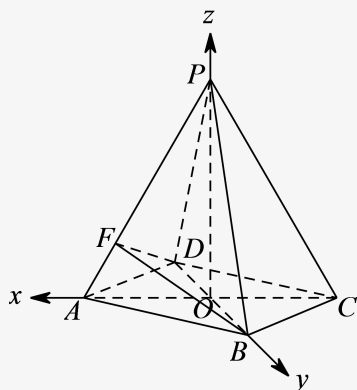
所以 $PO \perp AC, PO \perp BD$,

所以 $PO \perp$ 底面 $ABCD$.

(2) 由底面 $ABCD$ 是菱形可得 $AC \perp BD$,

又由 (1) 可知 $PO \perp AC, PO \perp BD$.

如图, 以 O 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



由 $\triangle PAC$ 是边长为 2 的等边三角形, $PB = PD = \sqrt{6}$,

可得 $PO = \sqrt{3}, OB = OD = \sqrt{3}$.

所以 $A(1, 0, 0), C(-1, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), P(0, 0, \sqrt{3})$.

所以 $\overrightarrow{CP} = (1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{AP} = (-1, 0, \sqrt{3})$.

由已知可得 $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AP} = (\frac{3}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{4})$

设平面 BDF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \sqrt{3}y = 0 \\ \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0 \end{cases}$,

令 $x = 1$, 则 $z = -\sqrt{3}$, 所以 $\vec{n} = (1, 0, -\sqrt{3})$.

因为 $\cos \langle \overrightarrow{CP}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{CP}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{1}{2}$,

所以直线 CP 与平面 BDF 所成角的正弦值为 $\frac{1}{2}$,

所以直线 CP 与平面 BDF 所成角的大小为 30° .

(3) 设 $\frac{BM}{BP} = \lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \lambda \overrightarrow{BP} = (1, \sqrt{3}(1-\lambda), \sqrt{3}\lambda) .$$

若使 $CM \parallel$ 平面 BDF , 需且仅需 $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0$ 且 $CM \notin$ 平面 BDF ,

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{3} \in [0, 1] ,$$

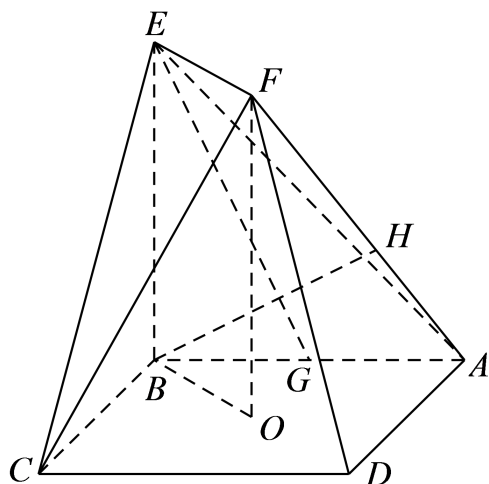
所以在线段 PB 上存在一点 M , 使得 $CM \parallel$ 平面 BDF .

$$\text{此时 } \frac{BM}{BP} = \frac{1}{3} .$$

【标注】【知识点】向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的平行问题；线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定

19. 2016年高考真题天津卷理科第17题14分 ★★★

如图, 正方形 $ABCD$ 的中心为 O , 四边形 $OBEF$ 为矩形, 平面 $OBEF \perp$ 平面 $ABCD$, 点 G 为 AB 的中点, $AB = BE = 2$.



(1) 求证: $EG \parallel$ 平面 ADF ;

(2) 求二面角 $O-EF-C$ 的正弦值;

(3) 设 H 为线段 AF 上的点, 且 $AH = \frac{2}{3}HF$, 求直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值 .

【答案】 (1) 证明见解析;

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(3) \frac{\sqrt{7}}{21}$$

【解析】 (1) 证明: 取 AD 中点 I , 连结 FI ,

$\because$ 矩形 $OBEF$, $\therefore EF \parallel OB$

$\because G, I$ 是中点, $\therefore GI$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线

$\therefore GI \parallel BD$ 且 $GI = \frac{1}{2}BD$

$\because O$ 是正方形 $ABCD$ 中心

$$\therefore OB = \frac{1}{2}BD$$

$$\therefore EF \parallel GI \text{ 且 } EF = GI$$

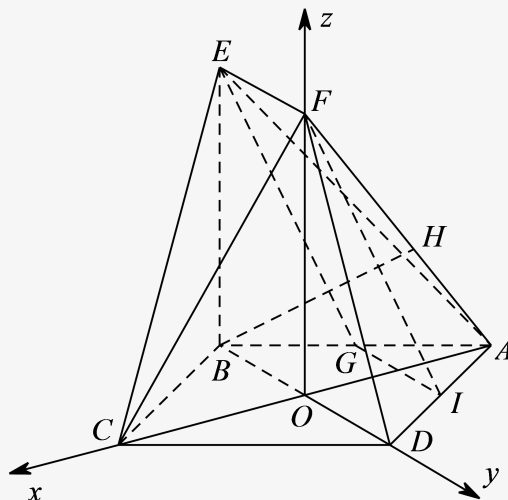
$\therefore$ 四边形 $EFIG$ 是平行四边形

$$\therefore EG \parallel FI$$

$\because FI \subset \text{面 } ADF, EG \not\subset \text{面 } ADF$

$\therefore EG \parallel \text{面 } ADF;$

(2) 如图所示建立空间直角坐标系 $O-xyz$



$$B(0, -\sqrt{2}, 0), C(\sqrt{2}, 0, 0), E(0, -\sqrt{2}, 2), F(0, 0, 2)$$

设面 CEF 的法向量 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{EF} = (x, y, z) \cdot (0, \sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}y = 0, \vec{n}_1 \cdot \vec{CF} = (x, y, z) \\ \cdot (-\sqrt{2}, 0, 2) = -\sqrt{2}x + 2z = 0, \end{cases}$$

$$\text{得: } \begin{cases} x = \sqrt{2}, y = 0, z = 1, \end{cases}$$

$$\therefore \vec{n}_1 = (\sqrt{2}, 0, 1)$$

$\because OC \perp \text{面 } OEF,$

$\therefore$ 面 OEF 的法向量 $\vec{n}_2 = (1, 0, 0)$

$$|\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

二面角 $O-EF-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}.$

$$(3) \because AH = \frac{2}{3}HF$$

$$\therefore \vec{AH} = \frac{2}{5}\vec{AF} = \frac{2}{5}(\sqrt{2}, 0, 2) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

设 $H(x, y, z)$

$$\therefore \vec{AH} = (x + \sqrt{2}, y, z) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

$$\text{得: } \begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{2}}{5}, y = 0, z = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{BH} = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{5}, \sqrt{2}, \frac{4}{5} \right)$$

设直线 BH 和平面 CEF 所成角为 θ

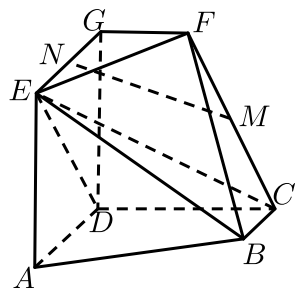
$$\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{BH}, \vec{n}_2 \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{BH} \cdot \vec{n}_1|}{|\overrightarrow{BH}| |\vec{n}_1|} = \frac{\left| -\frac{6}{5} + \frac{4}{5} \right|}{\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

所以直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{21}$.

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题

20. 2017~2018学年天津河西区天津市实验中学高二下学期期末理科第17题 ★★★★★

如图, $AD \parallel BC$ 且 $AD = 2BC$, $AD \perp CD$, $EG \parallel AD$ 且 $EG = AD$, $CD \parallel FG$ 且 $CD = 2FG$, $DG \perp$ 平面 $ABCD$, $DA = DC = DG = 2$.



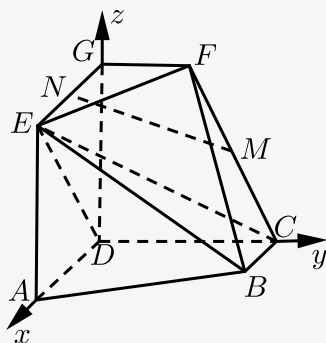
- (1) 若 M 为 CF 的中点, N 为 EG 的中点, 求证: $MN \parallel$ 平面 CDE .
- (2) 求二面角 $E-BC-F$ 的正弦值.
- (3) 若点 P 在线段 DG 上, 且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 60° , 求线段 DP 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】 (1) 建立以 D 为原点, 分别以 $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DG}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向的空间直角坐标系 (如图),



可得 $D(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(1,2,0)$, $C(0,2,0)$, $E(2,0,2)$, $F(0,1,2)$,
 $G(0,0,2)$, $M\left(0, \frac{3}{2}, 1\right)$, $N(1,0,2)$.

依题意 $\overrightarrow{DC} = (0,2,0)$, $\overrightarrow{DE} = (2,0,2)$,

设 $\vec{n}_0 = (x,y,z)$ 为平面 CDE 的法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \\ \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 2y = 0, \\ 2x + 2z = 0, \end{cases}$$

不妨令 $z = -1$, 可得 $\vec{n}_0 = (1,0,-1)$,

$$\text{又 } \overrightarrow{MN} = \left(1, -\frac{3}{2}, 1\right),$$

$$\text{可得 } \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}_0 = 0,$$

又因为直线 $MN \not\subset$ 平面 CDE ,

所以 $MN \parallel$ 平面 CDE .

(2) 依题意, 可得 $\overrightarrow{BC} = (-1,0,0)$, $\overrightarrow{BE} = (1,-2,2)$, $\overrightarrow{CF} = (0,-1,2)$.

设 $\vec{n} = (x,y,z)$ 为平面 BCE 的法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -x = 0, \\ x - 2y + 2z = 0, \end{cases}$$

不妨令 $z = 1$, 可得 $\vec{n} = (0,1,1)$.

设 $\vec{m} = (x,y,z)$ 为平面 BCF 的法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CF} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -x = 0, \\ -y + 2z = 0, \end{cases}$$

不妨令 $z = 1$, 可得 $\vec{m} = (0,2,1)$.

$$\text{因此有 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{于是 } \sin \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

所以, 二面角 $E-BC-F$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(3) 设线段 DP 的长为 h ($h \in [0,2]$), 则点 P 的坐标为 $(0,0,h)$,

$$\text{可得 } \overrightarrow{BP} = (-1,-2,h),$$

易知, $\overrightarrow{DC} = (0,2,0)$ 为平面 $ADGE$ 的一个法向量,

$$\text{故 } \left| \cos \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{DC} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{DC}|} = \frac{2}{\sqrt{h^2+5}},$$

$$\text{由题意, 可得 } \frac{2}{\sqrt{h^2+5}} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得 } h = \frac{\sqrt{3}}{3} \in [0,2].$$

所以, 线段 DP 的长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题; 向量法解决二面角问题; 直线的方向向量与平

面的法向量；向量法求空间距离