

02空间向量

1. 空间向量的定义与运算

🔔 定义

我们把在三维空间中具有大小和方向的向量叫做**空间向量**。

🔔 夹角定义

已知两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，在空间中任取一点 O ，作 $\vec{OA} = \vec{a}$ ， $\vec{OB} = \vec{b}$ ，则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记作 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ($\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [0, \pi]$)。

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$ ，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互相垂直，记作 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 。

🔔 数量积定义

空间中的两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，总可以把它们平移到一个平面内，把平面向量的数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 叫做两个空间向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的数量积。

🔔 线性运算与数量积

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，则容易得到：

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3) ;$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) ;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

🔔 平行垂直的判断

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，

$$(1) \vec{a} // \vec{b} \left(\vec{b} \neq 0 \right) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} ;$$

$$(2) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 .$$

请读者自行证明上面两个结论。

🔔 模长与夹角的计算

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，则

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} .$$

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} .$$

- 已知向量 $\vec{a} = (0, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 0, 2)$, 若向量 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与向量 $\vec{a} - \vec{b}$ 互相垂直, 则 k 的值是 ().
A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{7}{4}$
- 若平面 α 与 β 的法向量分别是 $\vec{a} = (2, 4, -3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 2)$, 则平面 α 与 β 的位置关系是 ().
A. 平行 B. 垂直 C. 相交但不垂直 D. 无法确定
- 设 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 分别是平面 α , β 的法向量, $\vec{u} = (1, 2, -2)$, $\vec{v} = (-2, -4, m)$. 若 $\alpha // \beta$. 则实数 $m =$ _____.
- 已知空间向量 $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (m, 1, 1)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则实数 $m =$ ().
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
- 已知 $\vec{AB} = (1, 5, -2)$, $\vec{BC} = (3, 1, z)$. 若 $\vec{AB} \perp \vec{BC}$, $\vec{BP} = (x-1, y, -3)$, 且 $BP \perp$ 平面 ABC , 则实数 x, y, z 分别为 ().
A. $\frac{33}{7}, -\frac{15}{7}, 4$ B. $\frac{40}{7}, -\frac{15}{7}, 4$ C. $\frac{40}{7}, -2, 4$ D. $4, \frac{40}{7}, -15$
- 已知 A 点坐标是 $(-1, -2, 6)$, $B(1, 2, -6)$, O 为坐标原点, 则向量 $\vec{OA}$ 与向量 $\vec{OB}$ 的夹角是 ().
A. 0 B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. $\frac{3\pi}{2}$

2. 空间向量在立体几何中的应用

异面直线的夹角

直线 a, b 所成的角 θ 的余弦值为 $\frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|}$.

直线和平面的夹角

直线与直线在平面内的射影所成的角称为**直线与平面的夹角**.

直线与平面的夹角的取值范围是 $[0, \frac{\pi}{2}]$.

下面给出用向量运算求解直线 l 与平面 α 的夹角的步骤:

①建立合理的空间直角坐标系;

②求出直线的方向向量 $\vec{AB}$ 和平面 α 的法向量 $\vec{n}$;

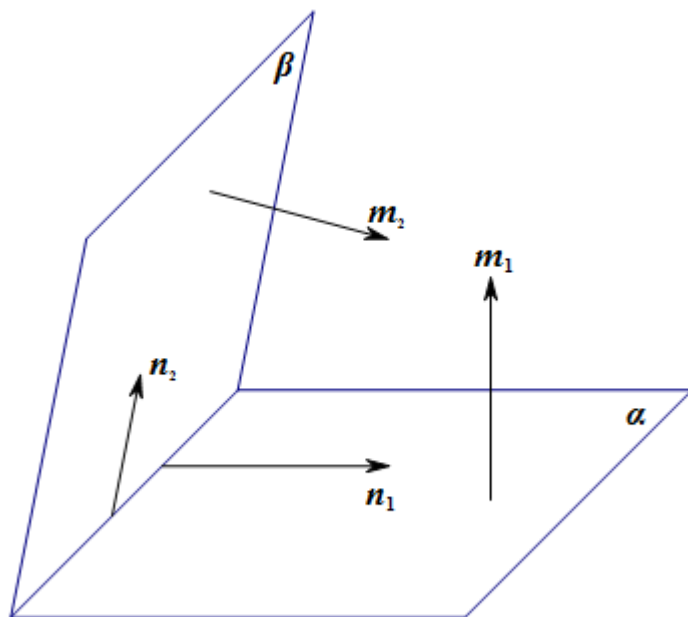
②设直线与平面 α 的夹角为 θ ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$), 则 θ 由表达式 $\sin \theta = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{n}|}$ 唯一确定.

平面和平面的夹角

在二面角 $\alpha - l - \beta$ 的棱 l 上任取一点 O , 在两个半平面 α 和 β 内分别作射线 $OA \perp l$, $OB \perp l$, 则 $\angle AOB$ 叫做二面角 $\alpha - l - \beta$ 的**平面角**.

这样，二面角的大小就完全可以利用平面角来度量；二面角的取值范围是 $[0, \pi]$ ；平面角是直角的二面角叫做**直二面角**。

如下图：



分别在二面角 $\alpha - l - \beta$ 的面 α 、 β 内，作向量 $\vec{n}_1 \perp l$ ， $\vec{n}_2 \perp l$ ，则我们可以用向量 $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 的夹角来度量二面角。

设 $m_1 \perp \alpha$ ， $m_2 \perp \beta$ ，则 $\langle m_1, m_2 \rangle$ 与该二面角大小相等或互补。

据此，我们将求解二面角的问题转化为求解两个半平面法向夹角的问题。

点到平面的距离

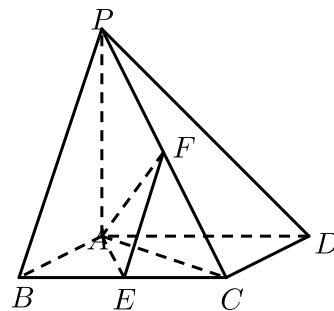
过空间不在平面 α 内一点 O 做平面 α 的垂线，垂足为 A ，另过 O 作 OB 交 α 于 B ，且 OA 与 OB 不

重合，设平面 α 的法向量为 $\vec{m}$ ， OB 与平面 α 所成的角为 θ ，则 $\sin \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{OB}|}{|\vec{m}| |\vec{OB}|}$ ，于是点 O 到平

面 α 的距离 $|OA| = |\vec{OB}| \cdot \sin \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{OB}|}{|\vec{m}|}$

异面直线所成角

7. 如图，已知四棱锥 $P - ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为菱形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， E ， F 分别是 BC ， PC 的中点。



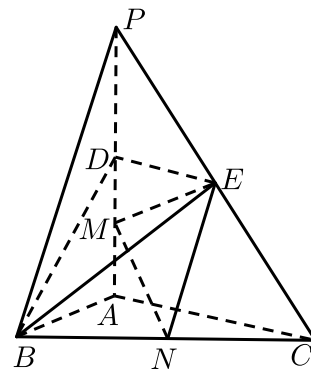
(1) 证明： $AE \perp PD$.

(2) 设 $AB = PA = 2$.

① 求异面直线 PB 与 AD 所成角的正弦值 .

② 求二面角 $E - AF - C$ 的余弦值 .

8. 如图，在三棱锥 $P - ABC$ 中， $PA \perp$ 底面 ABC ， $\angle BAC = 90^\circ$. 点 D ， E ， N 分别为棱 PA ， PC ， BC 的中点， M 是线段 AD 的中点， $PA = AC = 4$ ， $AB = 2$.

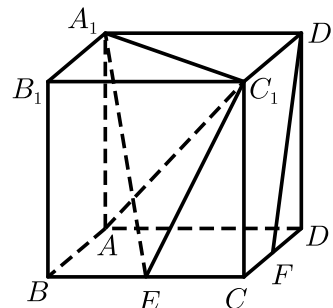


(1) 求证： $MN \parallel$ 平面 BDE .

(2) 已知点 H 在棱 PA 上，且直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{21}$ ，求线段 AH 的长 .

|| 线面角

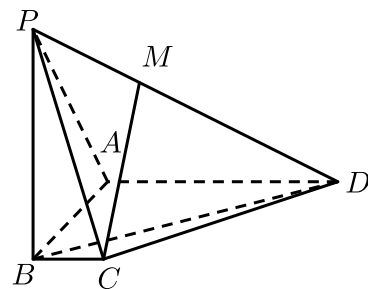
9. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 BC 的中点， F 为棱 CD 的中点 .



(1) 求证： $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 .

(2) 求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值 .

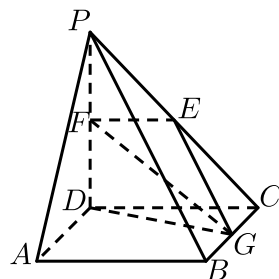
10. 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PB \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为梯形， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ，且 $PB = AB = AD = 3$ ， $BC = 1$ ， M 为棱 PD 上的点 .



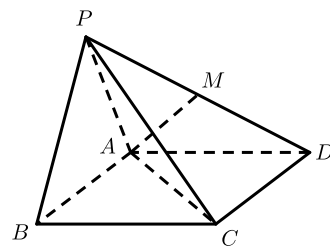
- (1) 若 $PM = \frac{1}{3}PD$, 求证 : $MC // \text{平面 } PAB$.
 (2) 求直线 BD 与平面 PAD 所成角的大小 .

二面角

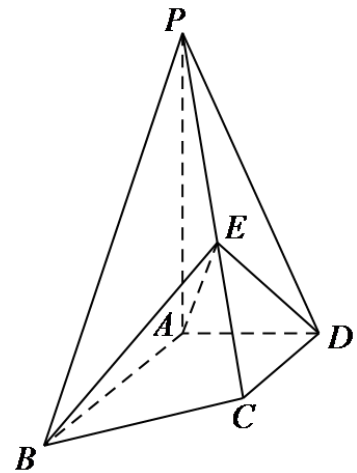
11. 如图 , 四棱锥 $P-ABCD$ 中 , 底面 $ABCD$ 为正方形 , $PD \perp \text{平面 } ABCD$, $PD = AB = 2$, 点 E 、 F 、 G 分别为 PC 、 PD 、 BC 的中点 .



- (1) 求证 : $PA \perp EF$.
 (2) 求证 : $FG // \text{平面 } PAB$.
 (3) 求二面角 $D-FG-E$ 的余弦值 .
12. 如图 , 在四棱锥 $P-ABCD$ 中 , 平面 $PAB \perp \text{平面 } ABCD$, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形 , $\triangle PAB$ 是等边三角形 , 点 M 是 PD 的中点 .



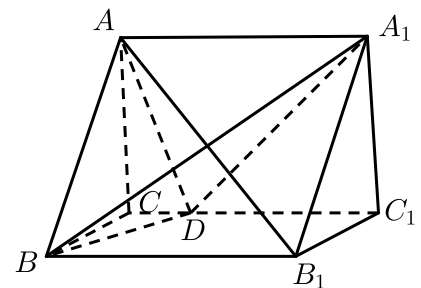
- (1) 求证 : $PB // \text{平面 } MAC$.
 (2) 求二面角 $B-PC-D$ 的余弦值 .
13. 如图 , 四棱锥 $P-ABCD$ 中 , $PA \perp \text{底面 } ABCD$, $AB // DC$, $DA \perp AB$, $AB = AP = 2$, $DA = DC = 1$, E 为 PC 上一点 , 且 $PE = \frac{2}{3}PC$.



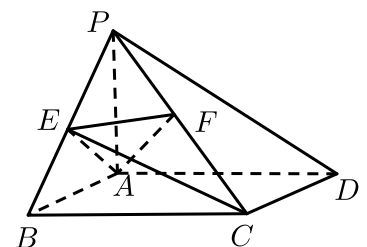
- (1) 求 PE 的长 .
- (2) 求证 : $AE \perp$ 平面 PBC .
- (3) 求二面角 $B-AE-D$ 的度数 .

|| 空间中的距离

14. 如图 , 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是直角三角形 , $\angle ACB = 90^\circ$, $AA_1 = AB = 2BC = 2$, $\overrightarrow{DC_1} = 3\overrightarrow{CD}$.



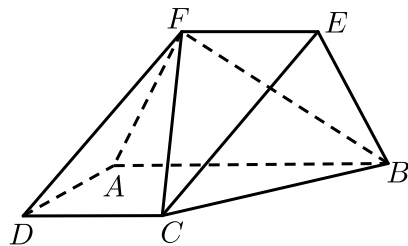
- (1) 求证 : $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD .
 - (2) 求点 B_1 到平面 A_1BD 的距离 .
15. 如图 , 在四棱锥 $P-ABCD$ 中 , $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 是矩形 , $PA = AB = 2$, $AD = 4$, E 是 PB 的中点 , $AF \perp PC$, 垂足为 F .



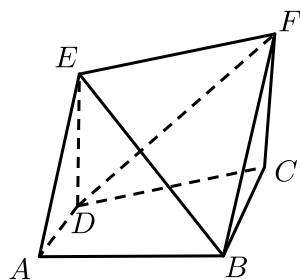
- (1) 证明 : $PD \parallel$ 平面 ACE .
- (2) 求点 F 到平面 PAB 的距离 .

3. 综合问题 (动点问题)

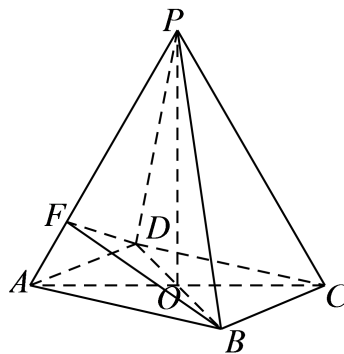
16. 如图，梯形 $ABCD$ 所在的平面与等腰梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直， $AB \parallel CD \parallel EF$ ， $AB \perp AD$ ， $CD = DA = AF = FE = 2$ ， $AB = 4$ 。



- (1) 求证： $DF \parallel$ 平面 BCE 。
- (2) 求二面角 $C - BF - A$ 的余弦值。
- (3) 线段 CE 上是否存在点 G ，使得 $AG \perp$ 平面 BCF ？请说明理由。
17. 如图所示，直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = BC = 2AD = 2$ ，四边形 $EDCF$ 为矩形， $CF = \sqrt{3}$ ，平面 $EDCF \perp$ 平面 $ABCD$ 。

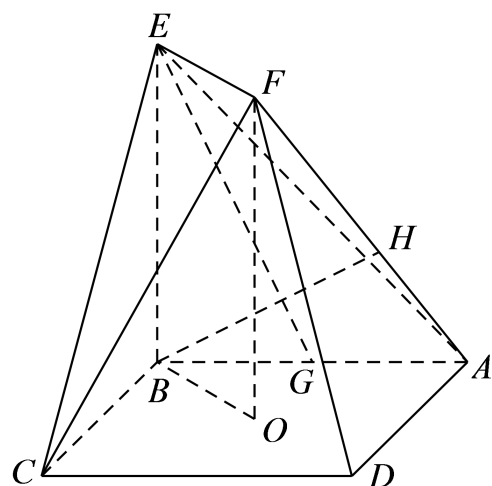


- (1) 求证： $DF \parallel$ 平面 ABE 。
- (2) 求平面 ABE 与平面 EFB 所成锐二面角的余弦值。
- (3) 在线段 DF 上是否存在点 P ，使得直线 BP 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，若存在，求出线段 BP 的长，若不存在，请说明理由。
18. 如图所示，在四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 是菱形， $AC \cap BD = O$ ， $\triangle PAC$ 是边长为 2 的等边三角形， $PB = PD = \sqrt{6}$ ， $AP = 4AF$ 。

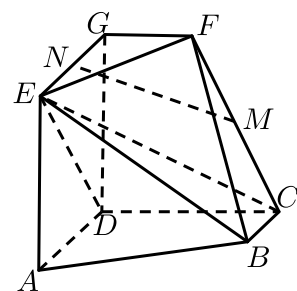


- (1) 求证： $PO \perp$ 底面 $ABCD$ 。
- (2) 求直线 CP 与平面 BDF 所成角的大小。
- (3) 在线段 PB 上是否存在一点 M ，使得 $CM \parallel$ 平面 BDF ？如果存在，求 $\frac{BM}{BP}$ 的值，如果不存在，请说明理由。

19. 如图，正方形 $ABCD$ 的中心为 O ，四边形 $OBEF$ 为矩形，平面 $OBEF \perp$ 平面 $ABCD$ ，点 G 为 AB 的中点， $AB = BE = 2$ 。



- (1) 求证： $EG \parallel$ 平面 ADF ；
 (2) 求二面角 $O-EF-C$ 的正弦值；
 (3) 设 H 为线段 AF 上的点，且 $AH = \frac{2}{3}HF$ ，求直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值。
20. 如图， $AD \parallel BC$ 且 $AD = 2BC$ ， $AD \perp CD$ ， $EG \parallel AD$ 且 $EG = AD$ ， $CD \parallel FG$ 且 $CD = 2FG$ ， $DG \perp$ 平面 $ABCD$ ， $DA = DC = DG = 2$ 。



- (1) 若 M 为 CF 的中点， N 为 EG 的中点，求证： $MN \parallel$ 平面 CDE 。
 (2) 求二面角 $E-BC-F$ 的正弦值。
 (3) 若点 P 在线段 DG 上，且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 60° ，求线段 DP 的长。