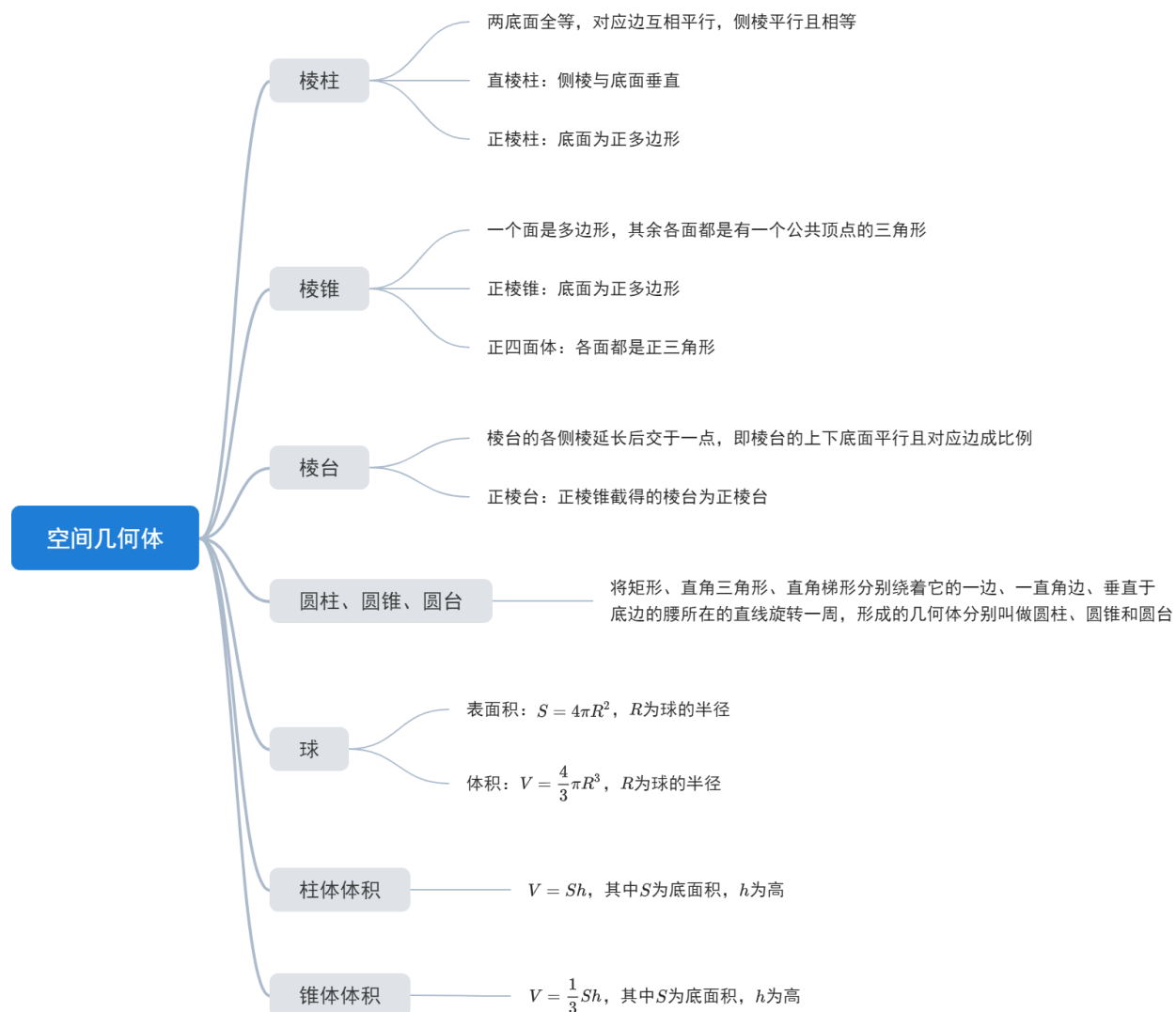


01空间几何体

1. 空间几何体



🧠 空间几何体

1. 2019~2020学年3月天津河西区天津市第四中学高一下学期月考第5题5分 ★★

下列命题是真命题的是（ ）.

- A. 有两个面相互平行，其余各面都是平行四边形的多面体是棱柱
- B. 正四面体是四棱锥
- C. 有一个面是多边形，其余各面都是三角形的多面体叫做棱锥
- D. 正四棱柱是平行六面体

【答案】D

【解析】 A 选项：棱柱的定义是有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行．故 A 错误；
B 选项：正四面体是三棱锥，故 B 错误，
C 选项：棱锥有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形的几何体，故 C 错误；
D 选项：正四棱柱是平行六面体，故 D 正确．
故选 D．

【标注】【知识点】空间几何体概念辨析问题；棱柱、棱锥、棱台的结构特征

2. 2020~2021 学年安徽合肥庐阳区合肥市第九中学高二上学期期中第 1 题 3 分 ★

下列命题中正确的是（ ）．

- A. 用一个平面去截棱锥，棱锥底面和截面之间的部分是棱台
- B. 两个底面平行且相似，其余各面都是梯形的多面体是棱台
- C. 棱台的底面是两个相似的正方形
- D. 棱台的侧棱延长后必交于一点

【答案】 D

【解析】 A 选项：应该用一个与底面平行的平面去截棱锥，故 A 错误；
B 选项：将两个全等的棱台上底贴合在一起，所得几何体的两底平行且相似，其余各面都是梯形，但是该几何体不是棱台，故 B 错误；
C 选项：棱台的底面可以是三角形、四边形、五边形等等，不一定是正方形，故 C 错误；
D 选项：棱台的侧棱延长后必交于一点，故 D 正确．
故选 D．

【标注】【知识点】棱柱、棱锥、棱台的结构特征；空间几何体概念辨析问题

3. 2017~2018 学年河北石家庄裕华区石家庄精英中学高一下学期期末第 2 题 4 分 ★★

下列命题正确的是（ ）．

- A. 棱锥是由一个底面为多边形，其余各面为具有公共顶点的三角形围成的几何体
- B. 用一个平面去截棱锥，棱锥底面和截面之间的部分为棱台
- C. 有两个面互相平行，其余四个面都是等腰梯形的六面体为棱台
- D. 一个正方形按不同方向平移所得几何体都是正方体

【答案】 A

【解析】 A 选项：由棱锥的定义知由一个底面为多边形，其余各面具有公共顶点的三角形围成的几何体是棱锥，故 A 正确；

B 选项：用一个平面去截棱锥，棱锥底面和截面之间的部分不一定为棱台，因为不能保证截面与底面平行，故 B 错误；

C 选项：有两个面互相平行，其余四个面都是等腰梯形的六面体不一定为棱台，因为不能保证各侧棱的延长线交于一点，故 C 错误；

D 选项：一个正方形按不同方向平移所得几何体，可能是正方体，也可能是长方体，故 D 错误。

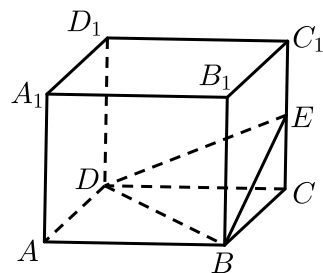
故选 A。

【标注】 【知识点】空间几何体概念辨析问题；棱柱、棱锥、棱台的结构特征

表面积与体积

4. 2020~2021 学年四川乐山高二上学期末理科第 15 题 5 分 ★★

如图，长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积是 120， E 为 CC_1 的中点，则三棱锥 $E - BCD$ 的体积是 _____。



【答案】 10

【解析】 因为长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 120，

所以 $AB \cdot BC \cdot CC_1 = 120$ ，

因为 E 为 CC_1 的中点，

所以 $CE = \frac{1}{2}CC_1$ ，

由长方体的性质知 $CC_1 \perp$ 底面 $ABCD$ ，

所以 CE 是三棱锥 $E - BCD$ 的高，

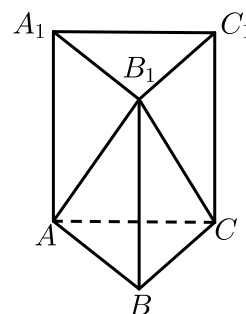
所以三棱锥 $E - BCD$ 的体积为：

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot CE \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \frac{1}{2} CC_1 = \frac{1}{12} \times 120 = 10. \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】求三棱锥的体积

5. 2019~2020学年天津河西区天津市第四十二中学高一下学期期末第15题3分 ★★

已知高为 3 的棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 1 的正三角形，如图，则三棱锥 $B - AB_1C$ 的体积为 () .



A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【答案】 D

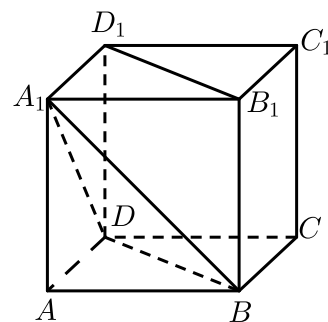
【解析】 $V_{B-AB_1C} = V_{B_1-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

故选 D .

【标注】 【知识点】 等体积法

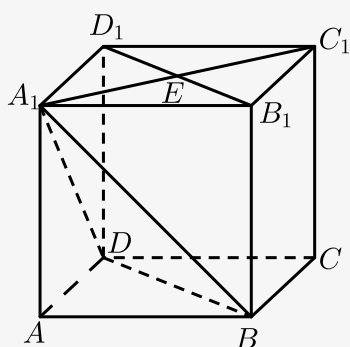
6. 2018~2019学年江苏徐州高二上学期期中第11题5分 ★★

如图，已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则四棱锥 $A_1 - BB_1D_1D$ 的体积为 _____ .



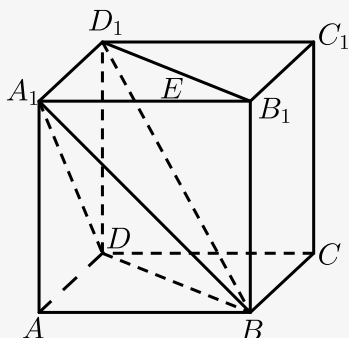
【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 方法一：如图，连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 E ，



则 $A_1E \perp B_1D_1$, $A_1E \perp BB_1$, 则 $A_1E \perp$ 平面 BB_1D_1D ,
 所以 A_1E 为四棱锥 $A_1 - BB_1D_1D$ 的高, 且 $A_1E = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 矩形 BB_1D_1D 的长和宽分别为
 $\sqrt{2}$, 1 , 故 $V_{A_1-BB_1D_1D} = \frac{1}{3} \times 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3}$.

方法二: 如图, 连接 BD_1 ,



则四棱锥 $A_1 - BB_1D_1D$ 分成两个三棱锥 $B - A_1DD_1$ 与 $B - A_1B_1D_1$,

$$\begin{aligned} V_{A_1-BB_1D_1D} &= V_{B-A_1DD_1} + V_{B-A_1B_1D_1} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 \\ &= \frac{1}{3} . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】空间几何体的体积

【素养】直观想象

7. 2019~2020学年5月天津河东区天津市第七中学高一下学期月考第13题4分 ★★

已知圆锥的母线长为 10cm , 侧面积为 $60\pi\text{cm}^2$, 则此圆锥的体积为 _____ cm^3 .

【答案】 96π

【解析】 $S = \pi r l$, $60\pi = \pi \times r \times 10$,

则 $r = 6$,

$$\therefore V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi .$$

【标注】【知识点】弧长公式与扇形面积; 组合体求体积、表面积问题

8. 2016年四川广元高三二模理科第4题5分 ★★

《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何?” 其意思为: “在屋内墙角处堆放米 (如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为 8 尺, 米堆的高为 5 尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少?” 已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺, 圆周率约为 3, 估算出堆放的米约有 () .



A. 14斛

B. 22斛

C. 36斛

D. 66斛

【答案】 B

【解析】 设米堆所在圆锥的底面半径为 r 尺，

$$\text{则 } \frac{1}{4} \times 2\pi r = 8,$$

$$\text{解得: } r = \frac{16}{\pi},$$

$$\text{所以米堆的体积为 } V = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times 5 = \frac{320}{3\pi} \approx 35.56,$$

$$\text{所以米堆有 } \frac{35.56}{1.62} \approx 22 \text{ (斛)},$$

故选 B.

【标注】 【知识点】空间几何体的体积

9. 2020~2021学年山东济南历城区历城第二中学高二上学期开学考试第2题5分 ★★

一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，这个圆柱的全面积与侧面积的比是（ ）.

A. $\frac{1+2\pi}{2\pi}$

B. $\frac{1+4\pi}{4\pi}$

C. $\frac{1+2\pi}{\pi}$

D. $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

【答案】 A

【解析】 圆柱侧面展开图为正方形，则圆柱的高 h 等于底面圆的周长 $2\pi r$ ，

$$\text{所以圆柱的侧面积为 } S_1 = 2\pi r \cdot h = 4\pi^2 r^2,$$

$$\text{圆柱的全面积 } S = S_1 + 2\pi r^2 = 2\pi(2\pi + 1)r^2,$$

$$\text{故 } \frac{S}{S_1} = \frac{2\pi(2\pi + 1)r^2}{4\pi^2 r^2} = \frac{2\pi + 1}{2\pi}.$$

故选 A.

【标注】 【知识点】空间几何体的表面积

10. 2017~2018学年9月青海西宁城北区西宁市第二十一中学高二上学期月考第7题5分 ★★

如果两个球的体积之比为 $8:27$ ，那么两个球的表面积之比为（ ）.

A. $8:27$

B. $2:3$

C. $4:9$

D. $2:9$

【答案】 C

【解析】 方法一：若两个球的体积之比是 $8:27$ ，则两个球的半径之比是 $2:3$ ，

所以表面积之比是 $4:9$ 。故选 C。

$$\text{方法二：} \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{8}{27} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3}，$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{4}{9}。$$

故选 C。

【标注】【知识点】组合体求体积、表面积问题；空间几何体的体积

2. 外接球与内切球

🕒 正方体（长方体）外接球

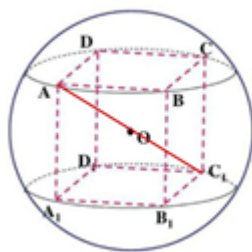


图1-1

长方体外接球： $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ （ a, b, c 分别为长方体的长、宽、高）；

正方体外接球： $2R = \sqrt{3}a$ （ a 为正方体的棱长）。

11. 2017~2018学年天津河西区天津市实验中学高二上学期期中理科第9题4分 ★★

已知一个长方体的同一个顶点出发的三条棱长分别为 $1, \sqrt{2}, \sqrt{6}$ ，则这个长方体外接球的表面积为 _____。

【答案】 9π

【解析】 长方体外接球的直径 $d = \sqrt{1+2+6} = 3$ ，

$$\therefore \text{半径 } r = \frac{d}{2} = \frac{3}{2}，$$

$$\therefore \text{长方体外接球的表面积为 } S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9\pi。$$

【标注】【知识点】圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征；空间几何体的内切球、外接球问题；组合体求体积、表面积问题；空间几何体的表面积

12. ★

棱长为 1 的正方体的外接球半径为多少？长宽高分别为 1、2、3 的长方体的外接球半径又是多少？

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；棱柱、棱锥、棱台的结构特征

正棱锥外接球

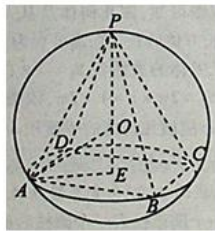
【备注】取圆心 → 设半径 → 勾股定理求半径

13. 2020年天津河东区高三下学期高考模拟第12题5分 ★★

正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为4，底面边长为2，则该球的体积为 _____ .

【答案】 $\frac{243\pi}{16}$

【解析】 设底面 $ABCD$ 的中心为 E ，则 PE 为正四棱锥的高， $PE = 4$ ， $AB = 2$ ，
 $AE = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$ ，设球心为 O ，则 O 一定在线段 PE 上，连接 OA ，设球的半径为 R ，
在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中， $OA^2 = AE^2 + OE^2$ 即 $R^2 = (\sqrt{2})^2 + (4 - R)^2$ ，解得 $R = \frac{9}{4}$ ，所以球的
体积为 $V = \frac{4\pi}{3} \times \left(\frac{9}{4}\right)^3 = \frac{243\pi}{16}$.



【标注】【知识点】组合体求体积、表面积问题；棱柱、棱锥、棱台的结构特征；空间几何体的内切球、外接球问题

14. 2020~2021学年重庆江北区重庆十八中两江实验中学高二上学期期中第7题5分 ★★

正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为4，底面边长为2，则该球的表面积为 () .

A. $\frac{81\pi}{4}$

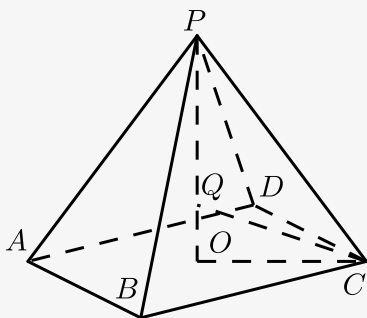
B. 16π

C. 9π

D. $\frac{27\pi}{4}$

【答案】 A

【解析】 如图，设球心为 Q ， $PQ \perp$ 平面 $ABCD$ ，



则 Q 在线段 PO 上, 且满足 $PQ = CQ = r$,
 其中 r 为球的半径, 由题意 $PO = 4$, $CO = \sqrt{2}$,
 于是有 $(PO - PQ)^2 + OC^2 = QC^2$,
 即 $(4 - r)^2 + \sqrt{2}^2 = r^2$,
 解得 $r = \frac{9}{4}$,
 所以该球的表面积为 $\frac{81\pi}{4}$, 故选 A.

【标注】【知识点】空间几何体的表面积

15. 2018~2019学年四川成都双流县棠湖中学高三上学期开学考试文科第9题5分 ★★

底面是边长为 1 的正方形, 侧面是等边三角形的四棱锥的外接球的体积为 ().

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

【答案】 D

【解析】 侧面为等边三角形,

所以四棱锥为正四棱锥,

从顶点向底面作垂直, 则垂足即为底面正方形的中心 O ,

因为正方形边长为 1,

所以 O 到顶点与到正方形四个顶点的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

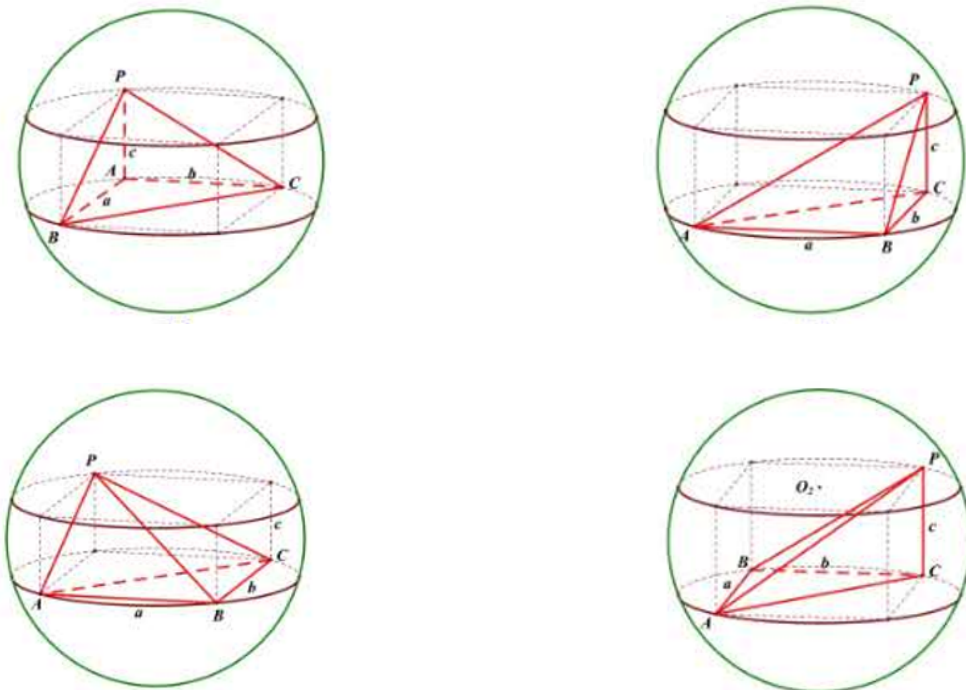
所以 O 即为球心, 球的半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

故选 D.

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题

 墙角模型 (三条线两两垂直)



16. 2019~2020学年12月陕西西安新城区西安西光中学高一上学期月考第15题4分 ★★

三棱锥 $P-ABC$ 中， PA, PB, PC 两两垂直， $PA=1, PB=PC=\sqrt{2}$ ，已知空间中有一个点到这四个点距离相等，则这个距离是 _____ .

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】 还原成长方体，距离为长方体外接球的半径，
而长方体外接球的直径为体对角线 $\sqrt{1+2+2}=\sqrt{5}$ ，
 $\therefore d=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【标注】 【知识点】 平面图形、空间几何体的直观图认识；动点轨迹问题；点、直线、平面之间的位置关系

17. 2016~2017学年北京东城区北京市第五十五中学高二上学期期中理科第7题5分 ★★

已知底面边长为 1，侧棱长 $\sqrt{2}$ 的正四棱柱的各顶点均在同一球面上，则该球的体积为 () .

- A. $\frac{32\pi}{3}$ B. 4π C. 2π D. $\frac{4\pi}{3}$

【答案】 D

【解析】 根据题意可知：该球的直径为正四棱柱的对角线，所以 $2R=\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2}=2$ ，即
 $R=1$ ，
所以该球的体积 $V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}$.
故选 D .

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的体积

18. 2008年高考真题福建卷理科第15题4分 ★

若三棱锥的三个侧面两两垂直，且侧棱长均为 $\sqrt{3}$ ，则其外接球的表面积是 _____ .

【答案】 9π

【解析】 方法一：三棱锥的三个侧面两两垂直，说明三棱锥的三条侧棱两两垂直，

设其外接球的半径为 R ，则有 $(2R)^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9$ ，

所以外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 9\pi$.

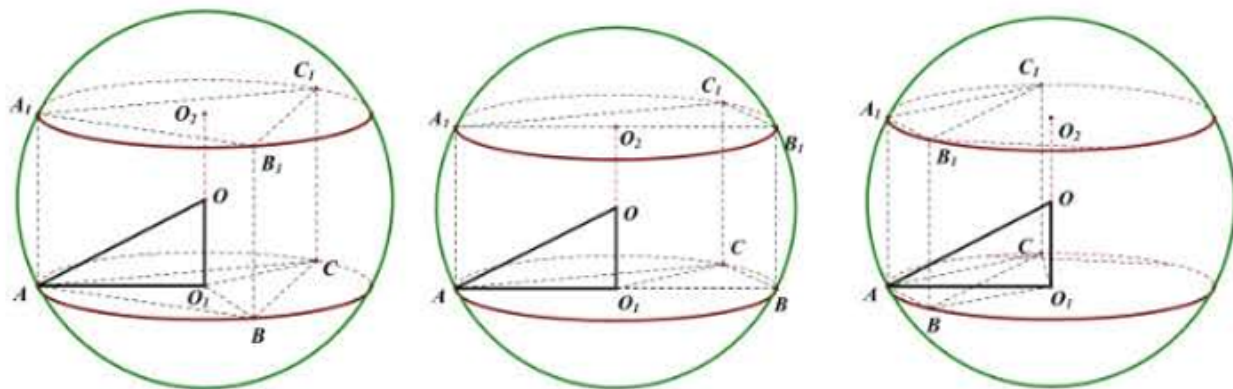
方法二：在棱长为 $\sqrt{3}$ 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，以截面 BDA_1 为底面， A 为顶点的三棱锥的三个侧面两两垂直，且侧棱长均为 $\sqrt{3}$ 的三棱锥，而正方体一定有一个外接球，该外接球也是所述三棱锥的外接球，正方体的体对角线是其外接球的直径，于是，

所求三棱锥外接球的表面积是 $4\pi \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}\right)^2 = 9\pi$.

故答案为： 9π .

【标注】【知识点】空间几何体中的求值问题

🍔 汉堡模型（直棱柱的外接球，圆柱的外接球）



【备注】底面分别为锐角三角形、直角三角形、钝角三角形，但做法一致，取底面外接圆半径以及高的一半勾股定理.

19. 2018~2019学年江苏淮安高二上学期期末第11题5分 ★★

已知正四棱柱的底面边长为 2，侧面积为 24，则此正四棱柱的外接球表面积为 _____ .

【答案】 17π

【解析】 设正四棱柱的高为 h ，

则该正四棱柱的侧面积为 $4 \times 2 \times h = 24$,

解得 $h = 3$.

底面正方形的外接圆直径为 $2r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$,

设外接球的半径为 R ,

则 $2R = \sqrt{(2r)^2 + h^2} = \sqrt{17}$,

因此, 该正四棱柱的外接球的表面积为 $4\pi R^2 = \pi \times (2R)^2 = 17\pi$.

故答案为: 17π .

【标注】【知识点】空间几何体的表面积; 组合体求体积、表面积问题; 空间几何体的内切球、外接球问题

20. 2016年内蒙古呼伦贝尔高三一模文科第9题5分 ★★

正三棱柱的底面边长为 $\sqrt{3}$, 高为 2, 则这个三棱柱的外接球的表面积为 ().

- A. 4π B. $8\sqrt{2}\pi$ C. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$ D. 8π

【答案】 D

【解析】 由正三棱柱的底面边长为 $\sqrt{3}$,

得底面所在平面截其外接球所成的圆 O 的半径 $r = 1$,

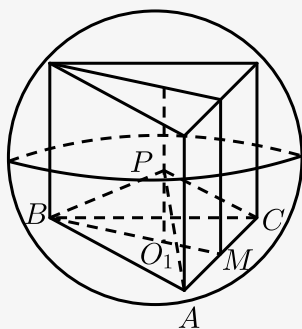
又由正三棱柱的高为 2, 则球心到圆 O 的球心距 $d = 1$,

根据球心距, 截面圆半径, 球半径构成直角三角形,

满足勾股定理, 我们易得球半径 R 满足: $R^2 = r^2 + d^2 = 2$, $\therefore R = \sqrt{2}$,

$\therefore$ 外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 8\pi$.

故选 D.



【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题; 空间几何体的表面积

21. 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一下学期期中第9题3分 ★★

已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面, 各顶点都在同一球面上, 若该棱柱的体积为 $\sqrt{3}$,

$AB = 2$, $AC = 1$, $\angle BAC = 60^\circ$, 则此球的表面积等于 ().

- A. 8π B. 9π C. 10π D. 11π

【答案】 A

【解析】 由 $AB = 2$, $AC = 1$, $\angle BAC = 60^\circ$,

$$\text{由余弦定理可得 } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\text{所 } V_{\text{柱}} = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \sqrt{3} , \text{ 所以可得 } AA_1 = 2 ,$$

$$\text{设三角形 } ABC \text{ 的外接圆的半径为 } r , \text{ 所以 } r = \frac{AB}{2} = 1 ,$$

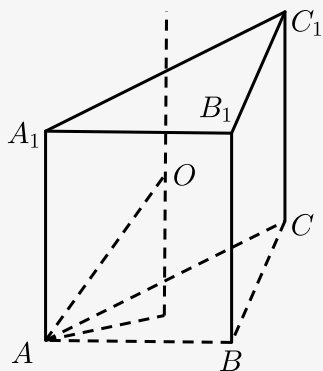
因为三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面 ,

所以三棱柱的外接球的球心是过底面外接圆的圆心作垂直于底面的直线与中截面的交点 ,

$$\text{设外接球的半径为 } R , \text{ 则 } R^2 = r^2 + \left(\frac{AA_1}{2} \right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2 ,$$

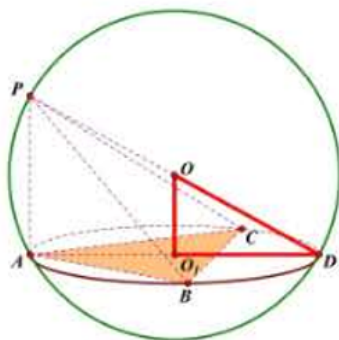
$$\text{所以外接球的表面积 } S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 2 = 8\pi ,$$

故选 A .



【标注】 【知识点】 空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的体积；空间几何体的表面积

🔗 垂面模型（一条侧棱垂直于底面）



如图： $PA \perp$ 平面 ABC

【备注】 可以补成棱柱，做法同汉堡模型：取底面外接圆半径以及高的一半.

22. 2017~2018学年10月广东广州越秀区广州市执信中学高二上学期月考理科第9题 ★★

已知三棱锥 $S-ABC$ 中，底面 ABC 为边长等于 $\sqrt{3}$ 的等边三角形， SA 垂直于底面 ABC ， $SA=1$ ，那么三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积为（ ）。

- A. 2π B. 4π C. 5π D. 6π

【答案】 C

【解析】 根据已知中底面 $\triangle ABC$ 是边长为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形， SA 垂直于底面 ABC ，可得此三棱锥外接球，即为以 $\triangle ABC$ 为底面以 SA 为高的正三棱柱的外接球，
 $\because \triangle ABC$ 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，
 $\therefore \triangle ABC$ 的外接圆半径 $r=1$ ，
 球心到 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心的距离 $d=\frac{1}{2}$ ，
 故球的半径 $R=\sqrt{r^2+d^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 。
 故三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积 $S=4\pi R^2=5\pi$ 。
 故选：C。

【标注】 【知识点】 空间几何体的表面积；空间几何体的内切球、外接球问题

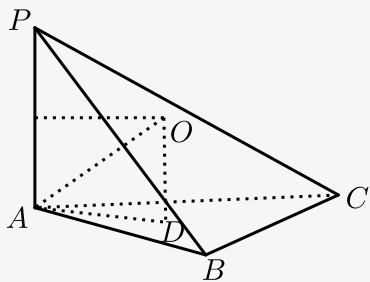
23. 2020年天津南开区天津中学高三下学期高考模拟（3月）第4题 ★★

在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ，且 $\triangle ABC$ 为等边三角形， $AP=AB=2$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为（ ）。

- A. $\frac{27}{2}\pi$ B. $\frac{28}{3}\pi$ C. $\frac{26}{3}\pi$ D. $\frac{25}{2}\pi$

【答案】 B

【解析】 如图所示：三棱锥 $P-ABC$ 中，



$PA \perp$ 平面 ABC ，且 $\triangle ABC$ 为等边三角形， $AP=AB=2$ ，
 $\therefore AD = \frac{2}{3}\sqrt{2^2-1^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，
 $\therefore$ 外接球的半径 $r^2 = 1^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{21}{9}$ ，
 $\therefore S = 4\pi \times \frac{21}{9} = \frac{28\pi}{3}$ 。

故选：B.

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的表面积

24. 2020~2021学年10月广东广州荔湾区广东广雅中学高二上学期月考第12题5分 ★★★

在四面体 $S-ABC$ 中， $SA \perp$ 平面 ABC ， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $SA = AC = 2$ ， $AB = 1$ ，则该四面体的外接球的表面积为（ ）.

- A. 11π B. 7π C. $\frac{10\pi}{3}$ D. $\frac{40\pi}{3}$

【答案】D

【解析】在 $\triangle ABC$ 中，

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ = 7,$$

$$BC = \sqrt{7}, \triangle ABC \text{ 的外接球直径为 } 2r = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore (2R)^2 = (2r)^2 + SA^2 = \left(\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4 = \frac{40}{3}, S = \frac{40\pi}{3}.$$

故选 D.

【标注】【知识点】空间几何体的表面积；空间几何体的内切球、外接球问题

🔴 内切球问题

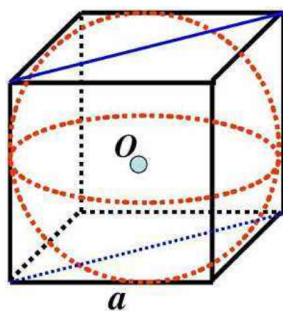


图1：正方体内切球

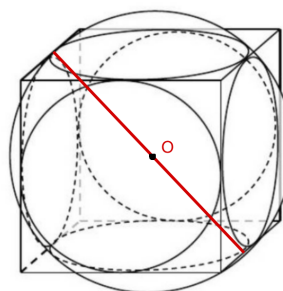


图2：正方体棱切球

【1】如图1，正方体内切球直径： $2R = a$ （ a 为正方体棱长）

【2】如图2正方体的棱切球直径=面对角线长，即 $2R = \sqrt{2}a$ （ a 为正方体棱长）

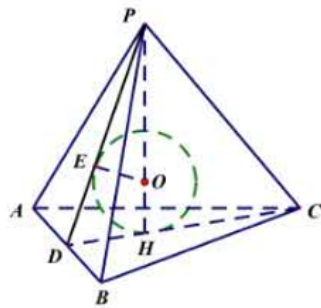


图3：正三棱锥内切球

【备注】用等体积法求内切球半径.

25. 2018~2019学年湖北高一下学期期中（部分重点中学）第6题5分 ★★

若一个正三棱柱存在外接球与内切球，则它的外接球与内切球表面积之比为（ ）.

- A. 3 : 1 B. 4 : 1 C. 5 : 1 D. 6 : 1

【答案】C

【解析】设正三棱柱底面正三角形的边长为 a ，内切球半径为 R_1 ， R_2 ，当球内切于正三棱柱时，球的半径 $R_1 = \frac{\sqrt{3}a}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}a}{6}$ ，故正棱柱的高为 $2 \times \frac{\sqrt{3}a}{6} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$.

当球外接正三棱柱时，球心是上下底面中心连接的中点，且球心与正三棱柱两个底面三角形构成两个正三棱柱. 所以 $R_2^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$,

$$\text{所以 } R_2 = \frac{\sqrt{15}a}{6}.$$

所以外接球与内切球半径之比为

$$R_2 : R_1 = \frac{\sqrt{15}a}{6} : \frac{\sqrt{3}a}{6} = \sqrt{5} : 1.$$

所以外接球与内切球表面积之比为 5 : 1.

故选 C.

【标注】【知识点】点、直线、平面之间的位置关系；空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的表面积；组合体求体积、表面积问题

26. ★★

正四面体的内切球和外接球的半径之比为（ ）.

- A. 1 : 2 B. 1 : 3 C. 1 : 4 D. 1 : 9

【答案】B

【解析】设棱长为 a ，外接球的半径为 R ，内切球的半径为 r ，则 $R^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - R\right)^2$

解得 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$, $r = \frac{\sqrt{6}}{3}a - \frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$, 有 $r : R = 1 : 3$.

故选 B.

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题

27. 2015年湖北全国高中数学联赛高二竞赛初赛第7题9分 ★★

已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面的边长为 6, 侧棱长为 $\sqrt{21}$, 则该三棱锥的内切球的半径为 _____

【答案】 1

【解析】 体积法. P 到底面的高为 $\sqrt{(\sqrt{21})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 3$, 侧面积为 $\frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{21-9} = 6\sqrt{3}$, 底面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$, 所以 $\frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 3 = \frac{r}{3} (6\sqrt{3} \times 3 + 9\sqrt{3})$, 解得 $r = 1$.

【标注】【知识点】空间几何体中的求值问题

3. 空间中的位置关系

【备注】下一讲空间向量综合问题会用到证明, 所以这里不放过多习题.

🔗 平行关系

【线面平行的判定】

如果不在一个平面内的一条直线和平面内的一条直线平行, 那么这条直线和这个平面平行.

符号语言: $l \not\subset \alpha, l // m, m \subset \alpha \Rightarrow l // \alpha$;

【线面平行的性质】

如果一条直线和一个平面平行, 经过这条直线的平面和这个平面相交, 那么这条直线和两平面的交线平行.

符号语言: $l // \alpha, l \subset \beta, \alpha \cap \beta = m \Rightarrow l // m$;

【面面平行的判定】

如果一个平面内有两条相交直线平行于另一个平面, 那么这两个平面平行.

符号语言: $l \subset \alpha, m \subset \alpha, l \cap m = A, l // \beta, m // \beta \Rightarrow \alpha // \beta$;

【面面平行的性质】

如果两个平行平面同时与第三个平面相交, 那么它们的交线平行.

符号语言: $\alpha // \beta, \alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n \Rightarrow m // n$;

🔗 垂直关系

【线面垂直的判定】

如果一条直线与平面内的两条相交直线垂直，则这条直线与这个平面垂直

符号语言： $a \perp b, a \perp c, b \subset \alpha, c \subset \alpha, b \cap c = A \Rightarrow a \perp \alpha$,

【线面垂直的性质】

如果两条直线垂直于同一个平面，那么这两条直线平行。

符号语言： $m \perp \alpha, n \perp \alpha \Rightarrow m // n$ 。

【面面垂直的判定】

如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直。

符号语言： $l \subset \alpha, l \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$ 。

【面面垂直的性质】

如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面。

符号语言： $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, n \subset \alpha, n \perp m \Rightarrow n \perp \beta$ 。

28. 2018~2019学年天津和平区天津市建华中学高三上学期期中理科第8题 ★★

已知 m 、 n 是两条不重合的直线， α 、 β 、 γ 是三个两两不重合的平面，给出下列四个命题：

①若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$ ，则 $\alpha // \beta$ ；

②若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \alpha$ ，则 $\alpha // \beta$ ；

③若 $m // \alpha, n // \beta, m // n$ ，则 $\alpha // \beta$ ；

④若 m 、 n 是异面直线， $m \perp \alpha, m // \beta, n \perp \beta, n // \alpha$ ，则 $\alpha \perp \beta$ ，其中真命题是（ ）。

A. ①和②

B. ①和③

C. ③和④

D. ①和④

【答案】D

【解析】①由线与面关系知正确；

②面两个垂直，则 β 与 α 也可能相交不平行，错；

③ α 与 β 也可能相交，错；

④ $m \perp \alpha$ ，则 m 垂直于 α 内所有直线， $m // \beta$ ，则 β 内有直线 $l_1 // m$ ，

又 $m \perp \alpha$ ，则 $l_1 \perp \alpha, l_1 \subset \beta$ ，故 $\alpha \perp \beta$ 。

故选 D。

【标注】【知识点】点、直线、平面之间的位置关系

29. 2017~2018学年12月湖北宜昌长阳县长阳一中高二上学期月考文科第7题5分 ★★

已知直线 l 、 m ，平面 α 、 β 且 $l \perp \alpha, m \subset \beta$ ，给出下列四个命题：

①若 $\alpha // \beta$ ，则 $l \perp m$ ；

②若 $l \perp m$ ，则 $\alpha // \beta$ ；

③若 $\alpha \perp \beta$, 则 $l // m$;

④若 $l // m$, 则 $\alpha \perp \beta$.

其中正确的命题个数为()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 ① $\because l \perp \alpha, \alpha // \beta, \therefore l \perp \beta$, 又 $\because m \subset \beta, \therefore l \perp m$, ①正确 .

②由 $l \perp m$ 推不出 $l \perp \beta$, ②错误 .

③当 $l \perp \alpha, \alpha \perp \beta$ 时, l 可能平行 β , 也可能在 β 内, $\therefore l$ 与 m 的位置关系不能判断, ③错误 .

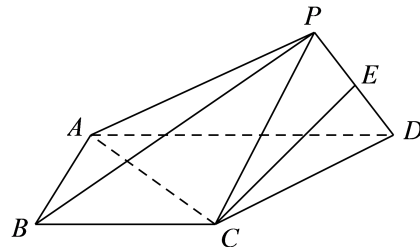
④ $\because l \perp \alpha, l // m, \therefore m \perp \alpha$, 又 $\because m \subset \beta, \therefore \alpha \perp \beta$, 正确 ;

故选 : B .

【标注】 【知识点】 已知线面位置关系判定结论的问题 ; 三个公理、三个推论 ; 点、直线、平面之间的位置关系

30. 2018年天津河西区高三一模文科第17题13分 ★★★

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD // BC$, $AB \perp BC$, $AB = BC = PC = PD = 1$, $AD = 2$, $\angle APD = 90^\circ$, E 为 PD 的中点 .



(1) 求证 : $CE //$ 平面 PAB .

(2) 求证 : $AC \perp$ 平面 PCD .

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 取 AP 的中点 F , 连接 EF , BF ,

$\because E$ 为 PD 中点, F 为 PA 中点,

$\therefore EF$ 为 $\triangle PAD$ 的中位线,

$EF // AD$, 且 $EF = \frac{1}{2} AD$,

又 $\because AD // BC$, $BC = \frac{1}{2} AD$,

$\therefore EF // BC$, 且 $EF = BC$,

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 为平行四边形,

$$\therefore CE \parallel BF,$$

$$\because CE \not\subset \text{平面 } PAB,$$

$$BF \subset \text{平面 } PAB,$$

$$\therefore CE \parallel \text{平面 } PAB.$$

$$(2) \because AB = BC = 1, AB \perp BC,$$

$$\therefore AC = \sqrt{2}, \text{ 又 } AD = 2, \angle CAD = 45^\circ,$$

$$\text{由余弦定理得: } CD = \sqrt{2}, \text{ 又 } PC = PD = 1,$$

$$\therefore PC^2 + PD^2 = CD^2, \text{ 即 } PC \perp PD,$$

$$\because \angle APD = 90^\circ, \therefore PD \perp AC,$$

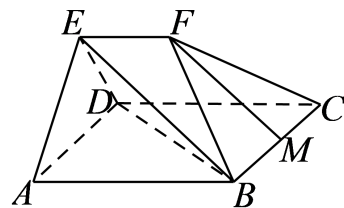
$$CD \cap PD = D,$$

$$\therefore AC \perp \text{平面 } PCD.$$

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题；几何法求空间角

31. 2018~2019学年12月天津河西区天津市实验中学高三上学期月考理科第17题13分 ★★★

已知：平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 45^\circ$ ， $AB = \sqrt{2}AD = 2\sqrt{2}$ ，平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\triangle AED$ 为等边三角形， $EF \parallel AB$ ， $EF = \sqrt{2}$ ， M 为线段 BC 的中点。



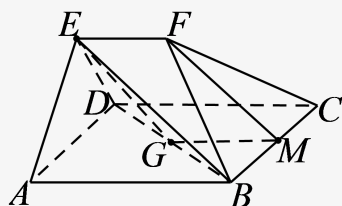
(1) 求证：直线 $MF \parallel$ 平面 BED 。

(2) 求证：平面 $BED \perp$ 平面 EAD 。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】(1) 取 BD 的中点 G ，连结 MG ， EG ，



$$\because M \text{ 为线段 } BC \text{ 的中点, } G \text{ 是 } BD \text{ 的中点,}$$

$$\therefore MG \parallel \frac{1}{2}CD, \text{ 又 } CD \parallel AB, EF \parallel \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \underline{EF} // \underline{GM},$$

$\therefore$ 四边形 $EFMG$ 是平行四边形,

$$\therefore MF // EG,$$

又 $MF \not\subset$ 平面 BED , $EG \subset$ 平面 BED ,

$$\therefore MF // \text{平面 } BED.$$

(2) 取 AD 中点 O , 连结 EO , 则 $OE \perp AD$,

$\therefore$ 平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $AED \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $OE \subset$ 平面 ADE ,

$$OE \perp AD,$$

$\therefore OE \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $BD \subset$ 平面 $ABCD$.

$$\therefore OE \perp BD.$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{2}, AD = 2, \angle BAD = 45^\circ,$$

$$\therefore BD = \sqrt{8 + 4 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 2 \times \cos 45^\circ} = 2,$$

$$\therefore AD^2 + BD^2 = AB^2.$$

$$\therefore AD \perp BD.$$

又 $AD \subset$ 平面 ADE , $OE \subset$ 平面 ADE , $AD \cap OE = O$,

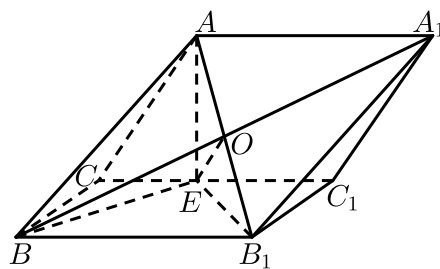
$\therefore BD \perp$ 平面 ADE , $BD \subset$ 平面 BDE .

$\therefore$ 平面 $BED \perp$ 平面 AED .

【标注】【知识点】向量法解决线面角问题

32. 2016年天津南开区高三一模文科第17题13分 ★★★

如图, 斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 , E 为棱 CC_1 的中点, A_1B 与 AB_1 交于点 O , 若 $AC = CC_1 = 2BC = 2$, $\angle ACC_1 = \angle CBB_1 = 60^\circ$.



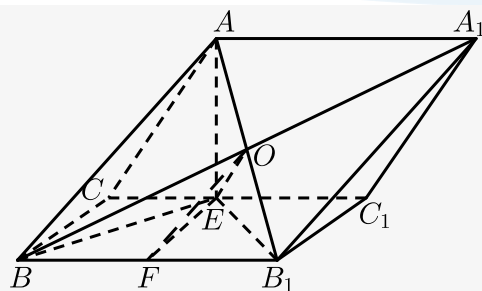
(1) 证明: 直线 $OE //$ 平面 ABC .

(2) 证明: 平面 $ABE \perp$ 平面 AB_1E .

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 取 BB_1 的中点 F , 连接 OF , EF ,



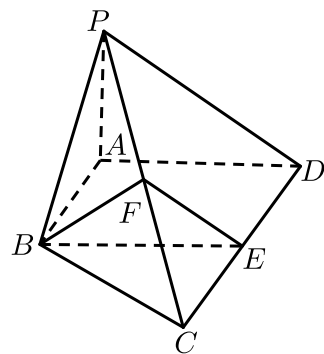
$\because E, O$ 分别为 CC_1, BA_1 的中点,
 $\therefore OF \parallel AB, EF \parallel BC,$
 $\because OF \not\subset \text{平面 } ABC, EF \not\subset \text{平面 } ABC,$
 $\therefore OF \parallel \text{平面 } ABC, EF \parallel \text{平面 } ABC,$
 $\therefore \text{平面 } OEF \parallel \text{平面 } ABC,$
 $\therefore \text{直线 } OE \parallel \text{平面 } ABC.$

(2) $\because AC = 2CE = 2, \angle ACC_1 = 60^\circ,$
 $\therefore AE \perp CC_1,$
 $\because \text{平面 } ACC_1A_1 \perp \text{平面 } BCC_1B_1,$
 $\therefore AE \perp \text{平面 } BCC_1B_1,$
 $\therefore AE \perp BE,$
 $\because BC = CE = EC_1 = C_1B_1 = 1, \angle CBB_1 = 60^\circ,$
 $\therefore \angle CEB = 30^\circ, \angle C_1EB_1 = 60^\circ,$
 $\therefore \angle BEB_1 = 90^\circ, \text{即 } EB_1 \perp BE,$
 $\therefore BE \perp \text{平面 } AB_1E,$
 $\therefore \text{平面 } ABE \perp \text{平面 } AB_1E.$

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；几何法求空间角；面面垂直的证明问题；平面和平面垂直的判定

33. 2018~2019学年天津和平区天津市建华中学高三上学期期中理科第21题 ★★★

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB \parallel CD, AB \perp AD, CD = 2AB$ ，平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PA \perp AD$ ， E 和 F 分别是 CD 和 PC 的中点，求证：



(1) $PA \perp$ 底面 $ABCD$.

(2) $BE \parallel$ 平面 PAD .

(3) 平面 $BEF \perp$ 平面 PCD .

【答案】 (1) 见解析 .

(2) 见解析 .

(3) 见解析 .

【解析】 (1) $\because$ 面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$.

面 $PAD \cap$ 面 $ABCD = AD$.

$PA \subset$ 面 PAD 且 $PA \perp AD$.

$\therefore PA \perp$ 面 $ABCD$.

(2) $\because AB \parallel CD$, $CD = 2AB$.

$\therefore DE \parallel AB$.

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形 .

$\therefore BE \parallel AD$.

又 $\because BE \not\subset$ 面 PAD , $AD \subset$ 面 PAD .

$\therefore BE \parallel$ 面 PAD .

(3) $\because AB \perp AD$.

$\therefore$ 平行四边形 $ABED$ 为矩形 .

$\therefore BE \perp CD$, $AD \perp CD$.

$\because PA \perp$ 面 $ABCD$, $CD \subset$ 面 $ABCD$.

$\therefore CD \perp PA$.

又 $\because PA \cap AD = A$.

$\therefore CD \perp$ 面 PAD .

$\therefore CD \perp PD$.

$\because EF$ 为 CPD 中位线 .

$\therefore EF \parallel PD$.

$\therefore CD \perp EF$.

又 $CD \perp BE$, $BE \cap EF = E$.

$\therefore CD \perp$ 面 BEF .

$\because CD \subset$ 面 PCD .

$\therefore$ 面 $BEF \perp$ 面 PCD .

【标注】 【知识点】面面垂直的证明问题

