

04数列综合习题

1. 数列分奇偶

- 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_4 - a_2 = 12$, $S_4 + 2S_2 = 3S_3$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1)$, $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $b_1 = 1$.
 - 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 .
 - 设 $c_n = \begin{cases} \frac{\log_2 a_n}{n^2(n+2)}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{2\sqrt{b_n}}{a_n}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, T_n 为 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 , 求 T_{2n} .
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列 , 满足 $a_1 = 3$, $b_1 = 1$, $b_2 + S_2 = 10$, $a_5 - 2b_2 = a_3$.
 - 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 通项公式 .
 - 令 $c_n = \begin{cases} \frac{2}{S_n}, (n \text{ 为奇数}) \\ b_n, (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 求 T_n .
- 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列 , S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 , 且 $a_{10} = 19$, $S_{10} = 100$, 数列 $\{b_n\}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 总有 $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \dots b_{n-1} \cdot b_n = a_n + 2$ 成立 .
 - 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .
 - 记 $c_n = (-1)^n \frac{4n \cdot b_n}{(2n+1)^2}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
- 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $2S_n = n - n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$.
 - 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .
 - 设 $b_n = \begin{cases} 2^{a_n}, (n = 2k-1) \\ \frac{2}{(1-a_n)(1-a_{n+2})}, (n = 2k) \end{cases} (k \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .
- 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 = 8$, $S_4 = 40$. 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $T_n - 2b_n + 3 = 0$, $n \in \mathbf{N}^*$.
 - 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 .
 - 设 $c_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数} \\ b_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 P_n .
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2 , 前 n 项和为 S_n , 且 S_1, S_2, S_4 成等比数列 .
 - 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 ;
 - 令 $b_n = (-1)^{n-1} \frac{4n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
- (10分) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n - \lambda (\lambda > 0, n \in \mathbf{N}^*)$.
 - (5分) 证明数列 $\{a_n\}$ 为等比数列 , 并求 a_n .
 - (5分) 若 $\lambda = 4$, $b_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数}, \\ \log_2 a_n, n \text{ 为偶数} \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

2. 数列与不等式综合

8. 设数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, $a_1 = 1$, $\frac{a_n + 1}{a_{n+1} + 1} = \frac{a_{n+1}}{3a_n}$, $b_n = a_n^2 + a_n$.
- (1) 求证数列 $\{b_n\}$ 为等比数列.
- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (3) 求证: $\frac{1}{(1+a_1)a_2} + \frac{1}{(1+a_2)a_3} + \cdots + \frac{1}{(1+a_n)a_{n+1}} < \frac{1}{2}$.
9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_{n+2} - a_n + \frac{1}{a_{n+2} \cdot a_n}$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 求证:
- $$T_n < 2n + \frac{5}{12}.$$

3. 数列放缩

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 其前 n 项的和为 S_n , 且当 $n \geq 2$ 时, 满足 $a_n = \frac{S_n^2}{S_n - 1}$.
- (1) 求证: 数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列.
- (2) 证明: $S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2 < \frac{7}{4}$.
11. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n + \frac{1}{a_n} = 2S_n$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 求证: 数列 $\{S_n^2\}$ 是等差数列.
- (2) 记数列 $b_n = 2S_n^3$, $T_n = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n}$, 证明: $1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < T_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.
12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $4(n+1)(S_n+1) = (n+2)^2 a_n (n \in \mathbf{N}^+)$.
- (1) 求 a_1 , a_2 的值.
- (2) 求 a_n .
- (3) 设 $b_n = \frac{n+1}{a_n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{3}{4}$.