

03数列求和习题

1. 倒序相加法

1. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = \frac{4^{x+1}}{4^x + 2}$, $S_n = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)$, $n = 2, 3, \cdots$, 则 $S_n =$ _____ .
2. 已知 $f(x) = \frac{3^x}{3^x + \sqrt{3}}$, 则 $f\left(\frac{1}{2020}\right) + f\left(\frac{2}{2020}\right) + f\left(\frac{3}{2020}\right) + \cdots + f\left(\frac{2019}{2020}\right) =$ _____ .
3. 设 $f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$, 则 $f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \cdots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) =$ _____ .
4. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}}$, 求 $f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + \cdots + f\left(\frac{8}{10}\right) + f\left(\frac{9}{10}\right)$ 的值 .
5. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 则 $f(2021) + \cdots + f(2) + f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2021}\right) =$ _____ .

2. 错位相减法

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_{10} = 28$, $S_8 = 92$, 数列 $\{b_n\}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 总有 $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} \cdot b_n = 3n + 1$ 成立 .
 - (1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式 .
 - (2) 记 $c_n = \frac{a_n \cdot b_n}{2^n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
7. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2n^2$, 在数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 = 1$, $b_{n+1} = 3b_n (n \in \mathbf{N}^*)$.
 - (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 ;
 - (2) 设 $c_n = a_n b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 前 n 项和 T_n .
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = qa_n$ (q 为实数, 且 $q \neq 1$), $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 且 $a_2 + a_3$, $a_3 + a_4$, $a_4 + a_5$ 成等差数列 .
 - (1) 求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式 ;
 - (2) 设 $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.
9. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3a_n - 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.
 - (1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式 .
 - (2) 设 $b_n = na_n$, 求数列 $\{b_{2n-1}\}$ 的前 n 项的和 T_n .
10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 = 2$, $S_4 = 10$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n = \log_2 b_n$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$.
 - (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 ;
 - (2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

11. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 其前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2^n + a(n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求 a 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = (2n-1)a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

3. 裂项相消法

12. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = 1$, $S_n = na_n - n(n-1)(n \in \mathbf{N}_+)$

(1) 求 a_n 的表达式;

(2) 若数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 问: 满足 $T_n > \frac{100}{209}$ 的最小正整数 n 是多少?

13. S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $a_n > 0$, $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

14. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, 记其前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = 5$, 则项数 n 的值为 ____.

4. 简单的分组求和

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n - 1(n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{b_n - a_n\}$ 是首项为3, 公差为3的等差数列, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 = 5$, $S_3 = a_7$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $b_n = 2^{a_n}$, 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和.

5. 并项求和

18. 已知 $S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - \cdots + (-1)^n(2n-1)$, 则 S_n 的值为 ().

A. $\pm n$

B. $(-1)^n n$

C. $(-1)^{n+1} n$

D. $2n$