

03数列求和

1. 倒序相加法

对于数列 $\{a_n\}$ ，若与首末两项等距离的两项之和等于首末两项之和，即满足

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_k + a_{n+1-k} = \cdots$ ，则此数列的前 n 项和可以用倒序相加法求得。

即在使用倒序相加法之前，要验证数列是否满足上述描述条件。

倒序相加法步骤

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_k + a_{n+1-k} = \cdots = t$ (t 为常数)，下面我们利用倒序相加法求其前 n 项和：

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

将 S_n 各项倒序重新排列，得：

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1,$$

将上面两式相加得到：

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = nt$$

进而得：

$$S_n = \frac{nt}{2}.$$

1. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$ ，利用课本中推导等差数列前 n 项和公式的方法，可求得

$$S = f(-5) + f(-4) + \cdots + f(0) + \cdots + f(5) + f(6) \text{ 的值为 ()}$$

A. $\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{2}$

D. $6\sqrt{2}$

2. 已知 $f(x)$ 满足 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ，当 $x_1 + x_2 = 1$ 时， $f(x_1) + f(x_2) = \frac{1}{2}$ ，若 $S_n =$

$$f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1), n \in \mathbf{N}, \text{ 求 } S_n.$$

2. 错位相减法

错位相减法的使用前提（等差 $\times$ 等比）

错位相减法适用于具有 $\{a_nb_n\}$ 或 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 形式的数列的前 n 项和，其中数列 $\{a_n\}$ 是公差为0的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是公比不为1的等比数列。

【注意】数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 是公比为 $\frac{1}{q}$ 的等比数列

🔗 错位相减法步骤

步骤一：乘公比

将上式两边同时乘以等比数列的公比 q ，得到：

$$qS = q^2 + 2q^3 + 3q^4 \cdots + nq^{n+1}.$$

步骤二：错位

比较两式中的元素 $q^k (k \in \mathbf{N}^*)$ ，将其幂指数对齐，得到：

$$S = q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \cdots + nq^n$$

$$qS = \quad q^2 + 2q^3 + 3q^4 \cdots (n-1)q^n + nq^{n+1}.$$

步骤三：相减

将调整后的两式相减得到：

$$(q-1)S_n = nq^{n+1} - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^n = nq^{n+1} - (q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n),$$

括号内的部分是等比数列的前 n 项和，进一步计算得到：

$$S_n = \frac{nq^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1}-q}{(q-1)^2}, \text{ 将其代入 (*) 就可以得到结果.}$$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 0$ ， $a_6 + a_8 = -10$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$ 的前 n 项和。

4. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， $\{b_n\}$ 为公比大于0的等比数列，且 $b_1 = 1$ ， $b_2 + b_3 = 6$ ， $a_3 = 3$ ， $a_4 + 2a_6 = b_5$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 记 $c_n = (2a_n - 1) \cdot b_{n+1}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求 S_n 。

5. 已知单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_3 + a_4 = 28$ ，且 $a_3 + 2$ 是 a_2 ， a_4 的等差中项。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = a_n \log_2 a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

6. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2n^2$ ， $\{b_n\}$ 为等比数列，且 $a_1 = b_1$ ， $b_2(a_2 - a_1) = b_1$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_n > 0$ 且 $a_1 a_3 = 36$ ， $a_3 + a_4 = 9(a_1 + a_2)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 若 $S_n + 1 = 3^{b_n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 及数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n = 3a_n - 3 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_3 a_n$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求数列 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 的前 n 项和.

(3) 设 $c_n = \frac{b_{2n-1}}{a_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 P_n .

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 - a_2 = 10$, $a_1 a_2 a_3 = 125$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, 且 $b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_n}{n} = b_{n+1} - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

① 求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

② 求 $\sum_{i=1}^n a_i b_{2i-1}$.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式

(2) 令 $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n}$. 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

3. 裂项相消法

把数列的通项拆成两项之差, 在求和时中间的一些项可以相互抵消, 从而求得其和.

常见的拆项公式有:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}; \\ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right); \\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]; \\ \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n};\end{aligned}$$

$$n \cdot n! = (n+1)! - n!;$$

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

11. 已知等差数列前三项为 $a, 4, 3a$, 前 n 项的和为 S_n , $S_k = 420$.

(1) 求 a 及 k 的值.

(2) 求 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n}$.

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n - n + 1$, $2a_1, a_1 + a_2 + a_3$ 分别是等比数列 $\{b_n\}$ 的首项和第二项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 求数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和.

(3) 求 $\sum_{i=1}^n a_{2i-1} b_i (n \in \mathbf{N}^*)$.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 6, a_{n-1} \cdot a_n - 6a_{n-1} + 9 = 0, n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$.

(1) 求证: 数列 $\left\{ \frac{1}{a_n - 3} \right\}$ 为等差数列.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)^2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是递增的等比数列, 且 $a_1 = 1, b_1 = 2, b_2 = 2a_2, b_3 = 3a_3 - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $c_n = \frac{2^{a_n}}{(b_n - 1)(b_{n+1} - 1)}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - n$.

(1) 证明数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $b_n = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 2, na_{n+1} = S_n + n(n+1)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .

(2) 设 T_n 为数列 $\left\{ \frac{a_n}{2^n} \right\}$ 的前 n 项和, 求 T_n .

(3) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$, 证明: $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n < \frac{1}{32}$.

17. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是等差数列.

已知 $a_1 = 1, a_3 = a_2 + 2, a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和.

(3) 求 $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_i}{(a_i + 1)(a_{i+1} + 1)}$.

18. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 已知 $a_1 = 1$,

$a_3 = a_2 + 2, a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

① 求 T_n .

② 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

19. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_n > 0$ 且 $a_1 a_3 = 36, a_3 + a_4 = 9(a_1 + a_2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

- (2) 若 $S_n + 1 = 3^{b_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 及数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
- (3) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 P_n .
20. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 前 n 项和 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 已知 $a_1 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4$, $a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}$, $a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7}$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n , b_n .
- (2) 设 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$.
- ① 求 T_n .
- ② 若 $c_n = \frac{(T_{n+1} - b_{n+1})b_{n+3}}{b_{n+1}b_{n+2}}$, 记 $R_n = \sum_{k=1}^n C_k$, 求 R_n 的取值范围.
21. 正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $S_n^2 - (n^2 + n - 1)S_n - (n^2 + n) = 0$,
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;
- (2) 令 $b_n = \frac{n+1}{(n+2)^2 a_n^2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n . 证明: 对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $T_n < \frac{5}{64}$.
22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$.
- (1) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.
- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .
- (3) 记 $c_n = \frac{(-1)^n (n^2 + 4n + 2) 2^n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

4. 简单的分组求和

分组求和的原则

数列求和应从通项入手. 有的数列, 从通项上看, 既不是等差数列, 也不是等比数列, 但将数列适当拆开, 可分为几个等差、等比数列或常见的数列, 对这类数列求和, 应先拆开, 然后分别求和, 再将其合并即可.

23. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_7 = -23$, $a_3 + a_8 = -29$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设数列 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .
24. 已知数列 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列, $a_1 \cdot a_4 = 8$, $a_2 + a_3 = 6$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) 记 $b_n = a_n + \log_2 a_{n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
25. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$. 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = b_2 = 2$, $b_{n+1} b_n = 2^{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求 $\sum_{i=1}^n a_i \left(b_{2i-1} - \frac{1}{b_{2i}} \right) (n \in \mathbf{N}^*)$.

5. 并项求和

并项求和的原则

并项求和法对一些特殊的数列来说, 将某些项合并在一起就具有某种特殊的性质, 因此, 在求数列的前 n 项和时, 可将这些项放在一起先求和, 再求整体的和.

26. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = (-1)^n(3n - 2)$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = (\quad)$.

A. 15

B. 12

C. -12

D. -15

27. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 3n - 1$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $b_n = (-1)^{n+1}a_n$, 则 $T_{19} = \underline{\hspace{2cm}}$.

28. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_3}$, $S_6 = 63$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, b_n 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项, 求数列 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 $2n$ 项和.