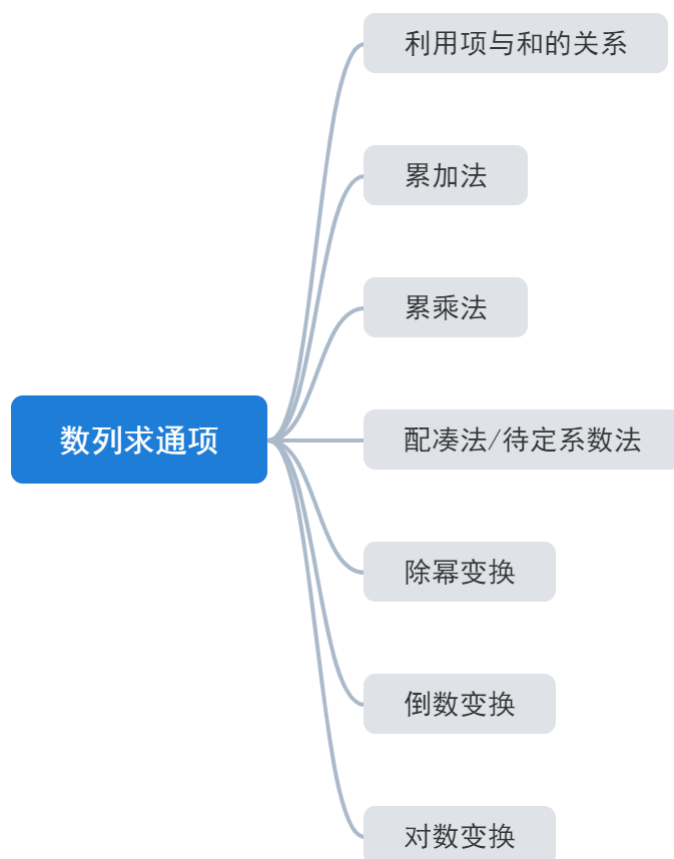


02数列求通项

🔗 题型梳理



1. 利用项与和的关系

🔗 已知 S_n , 求 a_n 步骤

由前 n 项和 S_n , 求通项公式的主要步骤有 four 步 :

- ① 令 $n = 1$ 确定 a_1 ;
- ② 由 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 确定 a_n ;
- ③ 检验②中 $n = 1$ 时的结果是否等于 a_1 ;
- ④ 写出通项公式 (若③中 a_1 , 符合 , 则合着写 ; 若不符 , 则分段写).

【备注】 【注意】 验证 $n=1$ 这一步非常重要 !!!

📊 利用 S_n 的表达式求解数列通项

1. 2019年北京西城区高三一模文科第16题13分 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n(n+1) + 2$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

【答案】 (1) $a_n = \begin{cases} 4, n=1 \\ 2n, n \geq 2 \end{cases}$.

【解析】 (1) 当 $n=1$ 时 , $S_1 = a_1 = 4$,

当 $n \geq 2$ 时 , 由题意 , 得 $S_n = n(n+1) + 2$ ① ,

$$S_{n-1} = (n-1)n + 2$$
 ② ,

由 ① - ② , 得 $a_n = 2n$, 其中 $n \geq 2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \begin{cases} 4, n=1 \\ 2n, n \geq 2 \end{cases}$.

【标注】 【知识点】 等比数列求通项问题

2. 2020~2021学年12月天津河东区天津市第七中学高二上学期月考第13题 ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 的 , 前项 n 和为 S_n , 且 $S_n = n^2 + 3n - 1$, 则 a_n 的通项为 _____ .

【答案】 $a_n = \begin{cases} 2n+2, n \geq 2 \\ 3, n=1 \end{cases}$

【解析】 $n=1$ 时 ,

$$S_1 = 1^2 + 3 \times 1 - 1 = 3 ,$$

$$a_1 = 3 ,$$

$n \geq 2$ 时 ,

$$a_n = S_n - S_{n-1} ,$$

$$= n^2 + 3n - 1 - [(n-1)^2 + 3(n-1) - 1] ,$$

$$= n^2 + 3n - n^2 - 1 + 2n - 3n + 3 ,$$

$$= 2n + 2 .$$

综上 $a_n = \begin{cases} 2n+2, n \geq 2 \\ 3, n=1 \end{cases}$.

【标注】 【知识点】 消去 S_n 构造 a_n 递推关系

3. 2020~2021学年12月天津河东区天津市第七中学高二上学期月考第9题 ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\frac{S_n+1}{n} = 2n+1$, 则 $a_1 + a_7 =$ _____ .

【答案】 29

【解析】 令 $n=1$ 时 , $\frac{S_1+1}{1} = 2 \times 1 + 1$, $S_1 + 1 = 3$, $a_1 = 2$,

$$S_n + 1 = 2n^2 + n$$
 ① , $S_{n-1} + 1 = 2(n-1)^2 + (n-1)$ ② ,

① - ② ,

$$a_n = 2n^2 + n - (2n^2 + 2 - 4n + n - 1),$$

$$a_n = n - 2 + 4n - n + 1 = 4n - 1,$$

$$\therefore a_7 = 4 \times 7 - 1 = 27,$$

$$\therefore a_1 + a_7 = 2 + 27 = 29.$$

【标注】【知识点】消去 S_n 构造 a_n 递推关系；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

根据 S_n 与 a_n 的关系确定数列通项

4. 2018年江苏盐城高三三模第11题5分 ★★★

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_n = 2a_n + n(n \in \mathbf{N}^*)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $-2^n + 1$

【解析】 由 $S_n = 2a_n + n(n \in \mathbf{N}^*)$,

当 $n = 1$ 时，可得 $S_1 = 2a_1 + 1$ ，即 $a_1 = -1$ 。

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n + n - (2a_{n-1} + n - 1) = 2a_n - 2a_{n-1} + 1$,

即 $a_n = 2a_{n-1} - 1$,

可得： $(a_n - 1) = 2(a_{n-1} - 1)$,

可得 $\{a_n - 1\}$ 是公比为2的等比数列，首项为-2。

$\therefore a_n - 1 = -2 \cdot 2^{n-1}$ 。

即 $a_n = -2^n + 1$ 。

故答案为： $-2^n + 1$ 。

【标注】【知识点】消去 S_n 构造 a_n 递推关系

5. 2018~2019学年天津南开区天津中学高二上学期期中第19题 ★★★

S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。已知 $a_n > 0$ ， $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$ 。

求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】 (1) $a_n = 2n + 1$ 。

【解析】 (1) 由 $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$ ，可知 $a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} = 4S_{n+1} + 3$ 。

可得 $a_{n+1}^2 - a_n^2 + 2(a_{n+1} - a_n) = 4a_{n+1}$ ，即

$2(a_{n+1} + a_n) = a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n)$ 。

由于 $a_n > 0$ ，可得 $a_{n+1} - a_n = 2$ 。

又 $a_1^2 + 2a_1 = 4a_1 + 3$ ，解得 $a_1 = -1$ （舍去）， $a_1 = 3$ 。

所以 $\{a_n\}$ 是首相为3，公差为2的等差数列，通项公式为 $a_n = 2n + 1$ 。

【标注】【知识点】裂项相消法求和

6. 2017~2018学年10月天津高三上学期月考文科第17题13分 ★★★

设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2S_n + 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) $a_n = 3^{n-1}$.

【解析】(1) 当 $n \geq 2$ 时, 由 $a_{n+1} = 2S_n + 1$,

$$\text{得 } a_n = 2S_{n-1} + 1,$$

$$\text{两式相减 } a_{n+1} - a_n = 2(S_n - S_{n-1}) = 2a_n,$$

$$\therefore a_{n+1} = 3a_n, \text{ 即 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3,$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, 由 } a_1 = 1, a_2 = 2S_1 + 1 = 2a_1 + 1 = 3,$$

$$\text{得 } \frac{a_2}{a_1} = 3,$$

$\therefore \{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 3 的等比数列,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^{n-1}$.

【标注】【知识点】错位相减法求和; 消去 S_n 构造 a_n 递推关系

7. 2018年天津和平区高三一模文科第18题13分 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{1}{4}(a_n^2 + 2a_n - 3)$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 数列 $\{b_n\}$ 是公差为正数的等差数列, 且 $b_2 = 5$, b_1, b_3, b_{11} 成等比数列.

求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) $a_n = 2n + 1$, $b_n = 3n - 1$.

【解析】(1) $\because S_n = \frac{1}{4}(a_n^2 + 2a_n - 3)$.

$$S_{n-1} = \frac{1}{4}(a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} - 3).$$

$$S_n - S_{n-1} = \frac{1}{4}(a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2a_n - 2a_{n-1}).$$

$$\therefore 4a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2a_n - 2a_{n-1}.$$

$$a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2(a_n - a_{n-1}) = 0.$$

$$\therefore (a_n + a_{n-1}) + (a_n - a_{n-1} - 2) = 0.$$

$\because \{a_n\}$ 各项都为正数.

$$\therefore a_n - a_{n-1} - 2 = 0.$$

$$\therefore a_n - a_{n-1} = 2.$$

$$\therefore n = 1 \text{ 时, } S_1 = \frac{1}{4}(a_1^2 + 2a_1 - 3).$$

$$\begin{aligned}
&\therefore a_1 = 3 \text{ 或 } -1 \text{ (舍去)} . \\
&\therefore \{a_n\} \text{ 为首项为 } 3, \text{ 公差为 } 2 \text{ 的等差数列} . \\
&\therefore a_n = 2n + 1 . \\
&\therefore \text{ 设 } \{b_n\} \text{ 公差为 } d . \\
&\therefore b_3^2 = b_1 \cdot b_{11}, \quad b_2 = 5 . \\
&\therefore (5 + d)^2 = (5 - d)(5 + 9d) . \\
&\therefore d = 3 . \\
&\therefore \{b_n\} \text{ 为首项为 } 2, \text{ 公差为 } 3 \text{ 的等差数列} . \\
&\therefore b_n = 3n - 1 .
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

8. 2018~2019学年10月天津河北区天津市第十四中学高三上学期月考文科第14题 ★★★

各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $a_2 = 4$ ， $a_{n+1}^2 = 6S_n + 9n + 1$ ，各项均为正数的等比数列 $\{b_n\}$ 足 $b_1 = a_1$ ， $b_3 = a_2$ 。

求证 $\{a_n\}$ 为等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 通项公式。

【答案】 (1) $a_n = 3n - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $b_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

【解析】 (1) $a_{n+1}^2 = 6S_n + 9n + 1$ ，
 $n \geq 2$ 时， $a_n^2 = 6S_{n-1} + 9(n-1) + 1$ ，
 两式相减，得 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 6a_n + 9 (n \geq 2)$
 $a_{n+1}^2 = (a_n + 3)^2$ ，
 又 $\{a_n\}$ 各项均为正数，
 $\therefore a_{n+1} = a_n + 3 (n \geq 2)$ ，
 $n = 1$ 时， $a_2^2 = 6a_1 + 9 + 1$ ，即 $a_1 = 1$ ，
 $a_2 - a_1 = 3$ 符合上式，
 $\therefore \{a_n\}$ 是以 $a_1 = 1$ 为首项，公差为3的等差数列，
 $\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ，
 $b_1 = a_1 = 1$ ， $b_3 = a_2 = 4$ ，
 $q^2 = \frac{b_3}{b_1} = 4$ ， $\{b_n\}$ 各项为正，
 $\therefore q = 2$ ，
 $\therefore b_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

【标注】【知识点】错位相减法求和

9. ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + 2S_n \cdot S_{n-1} = 0 (n \geq 2)$, 且 $a_1 = \frac{1}{2}$, 求 a_n .

【答案】 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, (n=1) \\ \frac{-1}{2n(n-1)}, (n \geq 2) \end{cases}$.

【解析】 由已知得: $a_n = S_n - S_{n-1}$,

$\therefore$ 原式得: $S_n - S_{n-1} + 2S_n S_{n-1} = 0$ 整理得: $\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2$, 所以 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 首项为 2 , 公差为 2 的等差数列 , 所以 $\frac{1}{S_n} = 2n$, 所以 $a_n = \frac{-1}{2n(n-1)}$.

【标注】 【知识点】构造等差数列求通项; 消去 a_n 构造 S_n 递推关系

10. 2018年天津河西区高三二模理科第18题13分 ★★★

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 当 $n \geq 2$ 时 , 满足 $(a_n - S_{n-1})^2 = S_n S_{n-1}$, 且 $a_1 = 1$.

求证: 数列 $\{S_n\}$ 是等比数列 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 由题意得 , $(S_n - 2S_{n-1})^2 = S_n S_{n-1}$, 则 $S_n^2 - 5S_n S_{n-1} + 4S_{n-1}^2 = 0$,

$$\text{即 } (S_n - S_{n-1})(S_n - 4S_{n-1}) = 0 ,$$

$$\therefore a_n(S_n - 4S_{n-1}) = 0 ,$$

因为数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数 , 所以 $S_n - 4S_{n-1} = 0$, 即 $\frac{S_n}{S_{n-1}} = 4$,

所以 $\{S_n\}$ 是以 1 为首项 , 4 为公比的等比数列 .

【标注】 【知识点】错位相减法求和; 消去 a_n 构造 S_n 递推关系; 等比数列的判定与证明

11. 2018~2019学年广东广州越秀区广州市第二中学高一下学期期中第15题5分 ★★

设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 , 且 $a_1 = -1$, $a_{n+1} = S_n S_{n+1}$, 则 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{n}$

【解析】 解: $\because a_{n+1} = S_n S_{n+1}$,

$$\therefore S_{n+1} - S_n = S_n S_{n+1} ,$$

$$\therefore \frac{1}{S_{n+1}} - \frac{1}{S_n} = -1 ,$$

$\therefore$ 数列 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 为等差数列 ,

$$\therefore a_1 = -1 ,$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{S_1} &= \frac{1}{a_1} = -1, \\ \therefore \frac{1}{S_n} &= -1 - (n-1) = -n, \\ \therefore S_n &= -\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】倒数型递推求通项；消去 a_n 构造 S_n 递推关系

构造新数列根据新数列和求解数列通项

12. 2017~2018学年广东东莞市高二下学期期末文科第18题12分 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 的满足 $a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 + \cdots + 2^{n-1}a_n = (2n-3) \cdot 2^n + 3$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$.

【解析】(1) $\because a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 + \cdots + 2^{n-1}a_n = (2n-3) \cdot 2^n + 3$, ①

当 $n = n-1$ 时, $a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 + \cdots + 2^{n-2}a_{n-1} = (2n-5) \cdot 2^{n-1} + 3$, ②,

由①-②可得, $2^{n-1}a_n = (2n-1)2^{n-1}$,

$\therefore a_n = 2n - 1$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1$ 成立,

故 $a_n = 2n - 1$.

【标注】【知识点】裂项相消法求和

13. 2018年江西新余高三二模文科第17题12分 ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 4a_2 + 4^2a_3 + \cdots + 4^{n-1}a_n = \frac{n}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) $a_n = \frac{1}{4^n} (n \in \mathbf{N}^*)$.

【解析】(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 4a_2 + 4^2a_3 + \cdots + 4^{n-1}a_n = \frac{n}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$ ①,

所以当 $n = 1$ 时, $a_1 = \frac{1}{4}$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_1 + 4a_2 + 4^2a_3 + \cdots + 4^{n-2}a_{n-1} = \frac{n-1}{4}$ ②,

由①-②可得: 当 $n \geq 2$ 时, $4^{n-1}a_n = \frac{n}{4} - \frac{n-1}{4} = \frac{n-n+1}{4} = \frac{1}{4}$,

从而 $a_n = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{4^n}$,

则当 $n = 1$ 时, 上式也成立,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{4^n}$.

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项；裂项相消法求和

14. 2018~2019学年福建厦门思明区厦门外国语学校高二上学期期中理科第19题 ★★★

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{5}a_3 + \cdots + \frac{1}{2n-1}a_n = n$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

【答案】 (1) $a_n = 2n - 1$.

【解析】 (1) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{5}a_3 + \cdots + \frac{1}{2n-3}a_{n-1} + \frac{1}{2n-1}a_n$ ① ,

$\therefore n \geq 2$ 时 , $a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{5}a_3 + \cdots + \frac{1}{2n-3}a_{n-1} = n-1$ ② ,

① - ② 得 $\frac{1}{2n-1}a_n = 1$,

即 $a_n = 2n - 1$,

当 $n = 1$ 时 , $a_1 = 1$ 适合上式 ,

$\therefore a_n = 2n - 1$.

【标注】 【知识点】 裂项相消法求和 ; 利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

15. ★★★

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} = 2n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

【答案】 (1) $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

【解析】 (1) 利用递推关系即可得出:

因为 $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} = 2n$, $n \in \mathbf{N}^*$,

所以当 $n = 1$ 时 , $a_1 = 2$.

当 $n \geq 2$ 时 , $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-2}} = 2(n-1)$,

得 , $\frac{a_n}{2^{n-1}} = 2$.

所以 $a_n = 2^n$.

因为 $a_1 = 2$, 适合上式 , 所以 $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

【标注】 【知识点】 裂项相消法求和 ; 利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

2. 累加法求数列通项

🔗 形如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$

下面我们来推导具有上述形式的数列的通项公式 :

将递推公式变形为 $a_{n+1} - a_n = f(n)$, 对 n 进行连续赋值 , 可以得到 :

$$a_n - a_{n-1} = f(n-1),$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = f(n-2),$$

$$a_{n-2} - a_{n-3} = f(n-3),$$

.....

$$a_3 - a_2 = f(2),$$

$$a_2 - a_1 = f(1).$$

将上面 $n-1$ 个等式左右分别叠加，得到：

左边：

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 = a_n - a_1$$

右边：

$$f(n-1) + f(n-2) + \cdots + f(2) + f(1) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

$$\text{故 } a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1} f(i), \text{ 即 } a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i),$$

若 $\sum_{i=1}^{n-1} f(i)$ 部分可以求出，那么就可以得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【备注】 在用累加法求解的过程中，重点在于等号右边采取什么样的求和方法，是等差数列的求和、等比数列的求和、分组求和还是以后会讲到的错位相减求和、裂项相消求和。在这部分老师可以直接举等差或等比的例子来讲解。以下习题会有简单的裂项求和问题。

16. 2014~2015学年10月辽宁沈阳于洪区辽宁省实验中学分校高二上学期月考第17题10分 ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ ， $a_1 = 1$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】 $a_n = n^2$ 。

【解析】 由 $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ 得 $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$ 则

$$\begin{aligned} a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1 \\ &= [2(n-1) + 1] + [2(n-2) + 1] + \cdots + (2 \times 2 + 1) + (2 \times 1 + 1) + 1 \\ &= 2[(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1] + (n-1) + 1 \\ &= 2 \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) + 1 \\ &= (n-1)(n+1) + 1 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2$ 。

【标注】 【知识点】 利用累加法求数列通项公式问题

17. ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$ ($n \geq 2$) , 求 a_n .

【答案】 $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

【解析】 由题意知 : $a_2 - a_1 = 3^1$, $a_3 - a_2 = 3^2$, $\dots$, $a_n - a_{n-1} = 3^{n-1}$,
各式两边分别相加得 : $a_n - a_1 = 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3(3^{n-1} - 1)}{2}$,
于是 $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ ($n \geq 2$) , 此式对 $n = 1$ 也成立 , 故 $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

【标注】 【知识点】 利用累加法求数列通项公式问题

18. ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + 2 \times 3^n + 1$, $a_1 = 3$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

【答案】 $a_n = 3^n + n - 1$.

【解析】 由 $a_{n+1} = a_n + 2 \times 3^n + 1$ 得 $a_{n+1} - a_n = 2 \times 3^n + 1$
则 $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1$
 $= (2 \times 3^{n-1} + 1) + (2 \times 3^{n-2} + 1) + \dots + (2 \times 3^2 + 1) + (2 \times 3^1 + 1) + 3$
 $= 2(3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3^2 + 3^1) + (n - 1) + 3$
 $= 2 \frac{3(1 - 3^{n-1})}{1 - 3} + (n - 1) + 3$
 $= 3^n - 3 + n - 1 + 3$
 $= 3^n + n - 1$
所以 $a_n = 3^n + n - 1$.

【标注】 【知识点】 利用累加法求数列通项公式问题

19. 2014年高考真题上海卷文科第7题 ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}$ ($n \geq 2$) , $a_n =$ _____ .

【答案】 $2 - \frac{1}{n}$

【标注】 【方法】 累加法

【素养】 数学运算

【知识点】 利用累加法求数列通项公式问题

20. ★★

在数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2 + 2n}$, 其中 $a_1 = 1$, 求 $\{a_n\}$ 通项公式 .

【答案】 $\frac{7n^2 + 3n - 2}{4n(n+1)}$.

【解析】

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{n^2 + 2n} \\ &= a_n + \frac{1}{n(n+2)} \\ &= a_n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right), \\ a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ a_n &= a_1 + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] \\ &= \frac{7n^2 + 3n - 2}{4n(n+1)}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

21. ★★

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 则 $a_5 = (\quad)$.

A. $2 + \ln 3$

B. $2 + \ln 5$

C. $3 + \ln 5$

D. $3 + \ln 2$

【答案】 B

【解析】 因为 $a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n + \ln(1+n) - \ln n$

$$\text{所以 } a_5 = a_4 + \ln 5 - \ln 4,$$

$$a_4 = a_3 + \ln 4 - \ln 3,$$

$$a_3 = a_2 + \ln 3 - \ln 2,$$

$$a_2 = a_1 + \ln 2 - \ln 1,$$

$$\text{累加得, } a_5 = a_1 + \ln 5 = 2 + \ln 5.$$

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

22. ★★

若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, 则 $\{a_n\}$ 的通项是 _____.

【答案】 $a_n = \sqrt{n}$

【解析】

$$\begin{aligned} \because a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \\ \therefore a_{n+1} - a_n &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}. \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 = 1 ,$$

$$a_2 - a_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} ,$$

$$a_3 - a_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} ,$$

$$a_4 - a_3 = \sqrt{4} - \sqrt{3} ,$$

$$\vdots$$

$$a_n - a_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} ,$$

以上 n 个式子相加, 得

$$a_n = 1 + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$= 1 + (\sqrt{n} - \sqrt{1})$$

$$= \sqrt{n} .$$

$$\therefore a_n = \sqrt{n} .$$

故答案为: $a_n = \sqrt{n} .$

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

3. 累乘法求数列通项

 形如 $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$

【备注】我们可以发现数列的后一项与前一项的比值是一个映射关系, 此时我们采取累乘的方法来解决它.

将递推公式变形为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$, 对 n 进行连续赋值, 可以得到:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n-1) ,$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = f(n-2) ,$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} = f(n-3) ,$$

.....

$$\frac{a_3}{a_2} = f(2) ,$$

$$\frac{a_2}{a_1} = f(1) .$$

将上面 $n-1$ 个等式左右分别叠加, 得到:

左边:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_n}{a_1} .$$

右边:

$$f(n-1) \cdot f(n-2) \cdot \cdots \cdot f(2) \cdot f(1) = \prod_{i=1}^{n-1} f(i) .$$

$$\text{故 } \frac{a_n}{a_1} = \prod_{i=1}^{n-1} f(i) , \text{ 即 } a_n = a_1 \cdot \prod_{i=1}^{n-1} f(i) ,$$

若 $\prod_{i=1}^{n-1} f(i)$ 部分可以求出，那么就可以得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【备注】 在用累乘法求解的过程中，重点在于等号右边每项的分子分母是否可以依次约分，当右边每项的分子分母数值相隔 t ，且 $t \geq 2$ 时，会出现错位约分的情况，运算结果也会出现前面有 t 项后面有 t 项无法约分而保留的情况。

23. 2016~2017 学年北京东城区北京市第二中学高一下学期期中第 17 题 5 分 ★★

数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = \frac{2}{3}$ ， $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$ ，则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{2}{3n}$

【解析】 $\because$ 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$ ，
 $\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$ ，
 $\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{3}$ ， $\frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{4}$ ， $\dots\dots$ ， $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n}$ ，
 $\therefore a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{n} = \frac{2}{3n}$ 。

【标注】 【知识点】利用累乘法求数列通项公式问题

24. ★

已知： $a_1 = \frac{1}{3}$ ， $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}a_{n-1}$ ($n \geq 2$)，求数列 $\{a_n\}$ 的通项。

【答案】 $a_n = \frac{1}{2n+1}$ 。

【解析】 $\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdot \frac{2n-5}{2n-3} \cdot \dots \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{2n+1}$ ，
 $\therefore a_n = a_1 \cdot \frac{3}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$ 。

【标注】 【知识点】利用累乘法求数列通项公式问题

25. ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n+3}{n+1}$ ，其中 $n \in \mathbf{N}_+$ ，求 a_n 。

【答案】 $a_n = \frac{(n+2)(n+1)}{3}$

【解析】 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} a_1 = \frac{n+2}{n} \cdot \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{2} a_1$
 $= \frac{n+2}{3} \cdot \frac{n+1}{2} \times 2 = \frac{(n+2)(n+1)}{3}$

【标注】 【知识点】利用累乘法求数列通项公式问题

26. ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ， $2^{n-1}a_n = a_{n-1} (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

【解析】 利用等式 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$ ，求通项公式。

$$\begin{aligned} \text{法一：} a_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdots \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot 1 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+3+\cdots+(n-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n-1)n}{2}}. \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$$\text{法二：由 } 2^{n-1}a_n = a_{n-1} \text{ 得：} a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a_{n-1} (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^+)$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} a_{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} a_1 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^+) \end{aligned}$$

又当 $n = 1$ 时， $a_1 = 1$ 符合上式，

$$\therefore a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

【标注】 【知识点】利用累乘法求数列通项公式问题

4. 配凑法/待定系数法求解



$$a_{n+1} = pa_n + q$$

【备注】 $a_{n+1} = pa_n + q$ ($p, q \in \mathbf{R}$ 且满足 $pq(p-1) \neq 0$)

若数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+1} = pa_n + q$ ，利用待定系数法，将递推公式变形为

$a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda)$ ，设 $b_n = a_n + \lambda$ ，则递推公式等价于 $b_{n+1} = pb_n$ ，因此数列 $\{b_n\}$ 是公比为 p 的等比数列，可根据等比数列的通项公式求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，进而 $\{a_n\}$ 的通项公式可求。

27. ★★

已知数列满足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} + 2a_n = 2$ ，求 a_n 。

【答案】 $a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot (-2)^{n-1}$ 。

【解析】 原式 $\Leftrightarrow a_{n+1} = 2 - 2a_n$ ，

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{2}{3} = -2 \left(a_n - \frac{2}{3}\right),$$

记 $b_n = a_n - \frac{2}{3}$ ， $\{b_n\}$ 是等比数列，公比为 -2 ，首项 $b_1 = a_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ，

$$\Rightarrow a_n - \frac{2}{3} = b_n = \frac{1}{3}(-2)^{n-1}.$$

$$\text{故 } a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot (-2)^{n-1}.$$

【标注】【知识点】构造等比数列求通项

28. ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 4$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____.

【答案】 $a_n = 3^n - 2$

【解析】 $a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$, $\{a_n + 2\}$ 是等比数列, 可求出 $a_n + 2 = 3^n$, 那么 $a_n = 3^n - 2$

【标注】【知识点】递推数列与递推方法

29. ★★

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 $a_n = 3 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

【解析】 $a_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}(a_n - 3) \therefore \{a_n - 3\}$ 是等比数列, 首项是 -2 , $\therefore a_n - 3 = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
 $a_n = 3 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

【标注】【知识点】利用待定系数法求数列通项公式问题



$$a_{n+1} = pa_n + qn$$

30. ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + n - 3$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____.

【答案】 $a_n = 2^{n-1} - n + 2$

【标注】【知识点】构造等比数列求通项



$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$$

【备注】 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ ($p, q \in \mathbf{R}$ 且满足 $pq \neq 0$)

若数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$, 可变形为 $a_{n+2} - xa_{n+1} = y(a_{n+1} - xa_n)$,

与原递推公式比较可得方程组 $\begin{cases} x + y = p \\ xy = -q \end{cases}$,

1. 若方程组有实数解, 则 $\{a_{n+1} - xa_n\}$ 是公比为 y 的等比数列, 通项公式可求, 进而转化为类型二, 以下略.
2. 若方程组无实数解, 则 $\{a_n\}$ 为周期数列, 利用题目给出条件 a_1, a_2 循环以此求出后续项可发现 $\{a_n\}$ 陷入循环. 至于为何方程组无实数解会导致 $\{a_n\}$ 是周期数列, 后期我们学习了复数之后再深入研究.

31. ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

(1) 求证: $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是等比数列.

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $a_n = n \times 2^{n-1}$.

【解析】 (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$,

则有 $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2a_n - 4a_n$,

即 $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$,

又由 $a_1 = 1, a_2 = 4$, 则 $a_2 - 2a_1 = 2$,

则数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 以 $a_2 - 2a_1 = 2$ 为首项, 2 为公比的等比数列.

(2) 有 (1) 有结论, 数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 以 $a_2 - 2a_1 = 2$ 为首项, 2 为公比的等比数列,

则 $a_{n+1} - 2a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$,

变形可得: $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}$,

又由 $\frac{a_2}{2^2} - \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$,

则数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列,

则 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2}$,

则 $a_n = n \times 2^{n-1}$;

即 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n \times 2^{n-1}$.

故答案为: $a_n = n \times 2^{n-1}$.

【标注】【知识点】等比数列的判定与证明; 构造等比数列求通项

32. ★★★

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_2 = 5, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$,

数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是否是等比数列;

【答案】 (1) 是.

【解析】 (1) $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n,$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n),$$

$\therefore \{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列.

【标注】【素养】数学运算

【方法】累加法

【方法】分组求和法

【知识点】分组法求和

【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

【知识点】等比数列的判定与证明

5. 除幂变换求数列通项

 $a_{n+1} = pa_n + r \cdot q^n$ ($p, q, r \in \mathbf{R}$ 且满足 $pqr(p-1) \neq 0$)

【备注】若数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+1} = pa_n + r \cdot q^n$, 将递推公式两边同时除以 q^{n+1} , 变形为 $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a_n}{q^n} + \frac{r}{q}$, 设 $b_n = \frac{a_n}{q^n}$, 则递推公式变形为 $b_{n+1} = \frac{p}{q}b_n + \frac{r}{q}$:

①若 $p = q$, 即 $\frac{p}{q} = 1$, 此时 $\{b_n\}$ 为等差数列, 通项公式可求, 进而求得 $\{a_n\}$ 的通项公式.

②若 $p \neq q$, 此时 $\{b_n\}$ 符合类型一, 以下略.

33. ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 _____.

【答案】 $a_n = 3^n - 2^n$

【解析】 $\because a_{n+1} = 2a_n + 3^n$.

$$\text{则 } \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}.$$

$$\text{令 } b_n = \frac{a_n}{3^n}.$$

$$\text{则 } b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}.$$

$$\therefore (b_{n+1} - 1) = \frac{2}{3}(b_n - 1).$$

$$\therefore \frac{b_{n+1} - 1}{b_n - 1} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{又有 } b_1 - 1 = \frac{a_1}{3^1} - 1 = -\frac{2}{3}.$$

$\therefore \{b_n - 1\}$ 是以 $-\frac{2}{3}$ 为首项, 公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列.

$$\therefore b_n - 1 = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

$$\therefore b_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1.$$

$$\therefore a_n = 3^n \cdot b_n = 3^n - 2^n .$$

【标注】【知识点】等比数列的概念与通项公式

【知识点】常见数列的通项公式

【素养】数学运算

34. ★★

已知 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4a_n + 2^{n+1}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

【答案】 $a_n = 4^n - 2^n$

【解析】 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 4 \cdot \frac{a_n}{2^{n+1}} + 1 = 2 \cdot \frac{a_n}{2^n} + 1$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + 1 = 2\left(\frac{a_n}{2^n} + 1\right)$$

$\{\frac{a_n}{2^n} + 1\}$ 是等比数列, $\therefore \frac{a_n}{2^n} + 1 = (1+1) \times 2^{n-1} = 2^n$, $\therefore a_n = (2^n - 1) \times 2^n = 4^n - 2^n$

【标注】【素养】数学运算

【方法】构造法

【知识点】构造等比数列求通项

6. 倒数变换求数列通项

 $a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n + r}$ ($p, q, r \in \mathbf{R}$ 且满足 $pqr \neq 0$)

【备注】若数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n + r}$, 两边取倒数得: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{qa_n + r}{pa_n} = \frac{r}{p} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{q}{p}$, 设 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 则递推公式变为 $b_{n+1} = \frac{r}{p}b_n + \frac{q}{p}$:

①若 $r = p$, 则 $\frac{r}{p} = 1$, 此时 $\{b_n\}$ 为等差数列, 通项公式可求, 进而求得 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

②若 $r \neq p$, 则 $\frac{r}{p} \neq 1$, 此时 $\{b_n\}$ 符合类型一, 以下略 .

35. ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

【答案】 $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$.

【解析】 $\therefore a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$,

两边同时取倒数 ,

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{a_n} = \frac{2}{a_n} + 1 .$$

$$\text{令 } b_n = \frac{1}{a_n} ,$$

$$\text{则 } b_{n+1} = 2b_n + 1$$

$$b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1),$$

$$\text{即 } \frac{b_{n+1} + 1}{b_n + 1} = 2.$$

$\therefore \{b_n + 1\}$ 是以 $b_1 + 1 = \frac{1}{a_1} + 1 = 2$ 为首项, 公比为 2 的等比数列,

$$\therefore b_n + 1 = 2^n,$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2^n - 1}.$$

$$\text{故答案为: } a_n = \frac{1}{2^n - 1}.$$

【标注】【知识点】常见数列的通项公式

36. ★★

已知 $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{2a_n + 1}$, 求 a_n .

【答案】 $a_n = \frac{2^{n+1}}{2^{n+2} - 7}$

【解析】 对递推式左右两边取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{2a_n}$ 即 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n} + 1$, 令 $\frac{1}{a_n} = b_n$ 则

$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 1$. 设 $b_{n+1} + \mu = \frac{1}{2}(b_n + \mu)$, 即 $\mu = -2$, $\therefore$ 数列 $\{b_n - 2\}$ 是以 $\frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$ 为首项、 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 则 $b_n - 2 = -\frac{7}{2^{n+1}}$, 即 $b_n = \frac{2^{n+2} - 7}{2^{n+1}}$, $\therefore a_n = \frac{2^{n+1}}{2^{n+2} - 7}$.

【标注】【知识点】倒数型递推求通项

37. 2016~2017学年3月陕西延安黄陵县黄陵县中学高三下学期月考文科普通班第13题5分 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_4 =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{53}$

【解析】 $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3} (n \in \mathbf{N}^*)$,

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 3}{a_n} = \frac{3}{a_n} + 2,$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} + 1 = 3 \left(\frac{1}{a_n} + 1 \right),$$

$$\text{又 } \frac{1}{a_1} + 1 = 2,$$

$\therefore \left\{ \frac{1}{a_n} + 1 \right\}$ 是首项为 2, 公比为 3 的等比数列,

$$\therefore \frac{1}{a_n} + 1 = 2 \times 3^{n-1},$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2 \times 3^{n-1} - 1},$$

$$\therefore a_4 = \frac{1}{2 \times 3^3 - 1} = \frac{1}{53}.$$

故答案为: $\frac{1}{53}$.

【标注】【知识点】等比数列的概念与通项公式

【知识点】常见数列的通项公式

【素养】数学运算

7. 对数变换求数列通项

 $a_{n+1}^p = a_n^q$ ($a_n > 0$ 且 $a_n \neq 1$, $pq \neq 0$)

【备注】若数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+1}^p = a_n^q$, 在 $a_n > 0$ 的前提下, 两边取对数 (如取常用对数), 则有 $p \lg a_{n+1} = q \lg a_n$, 设 $b_n = \lg a_n$, 则有 $b_{n+1} = \frac{q}{p} b_n$, 故 $\{b_n\}$ 为等比数列, 以下略.

38. 2002年高考真题上海卷 ★★

若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$ 且 $a_{n+1} = a_n^2$ (n 是正整数), 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 _____.

【答案】 $a_n = 3^{2^{n-1}}$

【解析】由题意知 $a_n > 0$,

将 $a_{n+1} = a_n^2$ 两边取对数得 $\lg a_{n+1} = 2 \lg a_n$, 即 $\frac{\lg a_{n+1}}{\lg a_n} = 2$,

所以数列 $\{\lg a_n\}$ 是以 $\lg a_1 = \lg 3$ 为首项, 公比为 2 的等比数列,

所以 $\lg a_n = \lg a_1 \cdot 2^{n-1} = \lg 3^{2^{n-1}}$, 即 $a_n = 3^{2^{n-1}}$.

【标注】【知识点】构造等比数列求通项

39. ★★

已知 $a_1 = e^2$, $a_{n+1}^7 = a_n^5$, 求 a_n .

【答案】见解析.

【解析】由首项可知 $a_n > 0$, 两边取对数得到 $7 \ln a_{n+1} = 5 \ln a_n$, 引入辅助数列 $b_n = \ln a_n$, 则有

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{5}{7}, \quad b_1 = \ln a_1 = 2, \quad \text{故 } b_n = 2 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}, \quad \text{因此 } a_n = e^{2 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}}.$$

【标注】【知识点】对数型递推求通项

40. ★★★

$a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n^2 + 6a_n + 6$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 $a_n = 7^{2^{n-1}} - 3$.

【解析】 $a_{n+1} = a_n^2 + 6a_n + 6$

$$\Rightarrow a_{n+1} + 3 = a_n^2 + 6a_n + 9 = (a_n + 3)^2 ,$$

$$\therefore \lg(a_{n+1} + 3) = 2\lg(a_n + 3) .$$

$$\lg(a_1 + 3) = \lg 7 \neq 0 ,$$

故 $\{\lg(a_n + 3)\}$ 为等比数列 ,

$$\text{则 } \lg(a_n + 3) = \lg 7 \cdot 2^{n-1} ,$$

$$\text{即 } a_n + 3 = 10^{\lg 7 \cdot 2^{n-1}} = 7^{2^{n-1}} ,$$

$$\text{所以 , } a_n = 7^{2^{n-1}} - 3 .$$

【标注】 【知识点】 构造等比数列求通项