平面向量数量积运算

一轮整合计划

向量共线的条件是什么？

如果$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，则$\vec{a}//\vec{b}$；反之，如果$\vec{a}//\vec{b}$，且$\vec{b}\neq\vec{0}$，则一定存在唯一的一个实数λ，使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

向量的坐标运算有哪些公式？

设$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，则：

（1）$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$；

（2）$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$；

（3）$\lambda\vec{a}=\lambda(a_1,a_2)=(\lambda a_1,\lambda a_2)$.

一、 平面向量的数量积

概念

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$叫做向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的数量积（或内积），记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$，即

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$.

备注：数量积运算的结果为数，而非向量.

（1）$|\vec{a}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$为$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影；

（2）$|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$为$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影；

（3）数量积的几何意义：其中一个向量在另一向量上的投影与后者的模的乘积.

平面向量数量积运算律

(1)交换律

$a\cdot b=b\cdot a$.

(2)结合律

$(\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b)=a\cdot(\lambda b)$

(3)分配律

$(a+b)c=a\cdot c+b\cdot c$.

(4)应用运算律得到的两个重要结论:

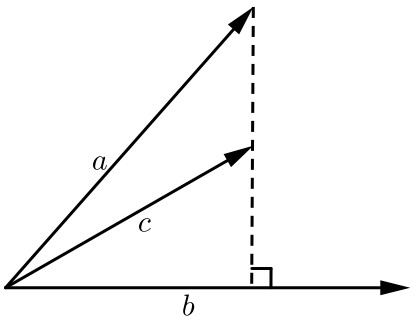
$(a+b)^2=a^2+2a\cdot b+b^2$,

$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

【温馨提示】

①两向量的数量积不是向量而是数量，要准确区分两向量数量积、数乘向量和实数与实数乘积间的运算性质.

②若a，b，$c(b\neq 0)$为实数，则$ab=bc\Rightarrow a=c$；但对于向量，就不正确，即$a\cdot b=b\cdot c\nRightarrow a=c$，由下图可以看出.



③数量积的运算只适合交换律、加乘分配律及数乘结合律，但不适合乘法结合律，即$(a\cdot b)c$不一定等于$a(b\cdot c)$.这是因为$(a\cdot b)c$表示一个与c共线的向量，而$a(b\cdot c)$表示一个与a共线的向量，而c与a不一定共线.

坐标表示、模、夹角

若$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$，

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$，

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$，

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$，

若$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$且$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，则$x_1y_2-x_2y_1=0$.

1. 已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$120°$，求：

   （1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$.

   （2）$\vec{a}^2-\vec{b}^2$.

   （3）$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})$.

   （4）$|\vec{a}+\vec{b}|$.

【答案】（ 1 ）-6 .

（ 2 ）-7 .

（ 3 ）-60 .

（ 4 ）$\sqrt{13}$.

【解析】（ 1 ） $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ$

$=3\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$.

（ 2 ） $\vec{a}^2-\vec{b}^2=|\vec{a}|^2-|b|^2$

$=3^2-4^2=-7$.

（ 3 ） $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})$

$=2\vec{a}^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}^2$

$=2|\vec{a}|^2+5|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos 120^\circ-3|\vec{b}|^2$

$=2\times 3^2+5\times 3\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3\times 4^2$

$=-60$.

（ 4 ） $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}$

$=\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}$

$=\sqrt{9-12+16}$

$=\sqrt{13}$.

【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积运算（非坐标）；向量的数量积的定义；平面向量数量积的运算律；利用向量数量积求模长

2. 已知向量$\vec{a}=(1,n)$，$\vec{b}=(-1,n)$，若$2\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}$垂直，则$\left|\vec{a}\right|=$（　）.

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

【答案】C

【解析】$\because\vec{a}=(1,n)$，$\vec{b}=(-1,n)$，

$\therefore 2\vec{a}-\vec{b}=(3,n)$，

$\because 2\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}$垂直，

$\therefore(3,n)\cdot(-1,n)=-3+n^2=0$，

$\therefore n^2=3$，

$\therefore\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1+n^2}=2$.

故选C．

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直

二、 平面向量数量积应用

1. 平面向量的数量积的性质和运算律的应用

根据数量积的运算律可知实数中的有些公式、结论对向量仍成立，如：

(1)$(a\pm b)^2=|a\pm b|^2=|a|^2\pm 2a\cdot b+|b|^2=a^2\pm 2a\cdot b+b^2$；

(2)$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)=|a|^2-|b|^2$；

(3)$(a+b)^2+(a-b)^2=2(|a|^2+|b|^2)$；

(4)$a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=b=0$；

(5)$||a|-|b||\le|a+b|\le|a|+|b|$，当且仅当$a$与$b$同向共线时右边等号成立，$a$与$b$反向共线时左边等号成立.

3. 在△ABC中，若$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$，$AB=2$，$AC=1$，$E$，$F$为$BC$边的三等分点，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$（　）.

A. $\frac{8}{9}$　　B. $\frac{10}{9}$　　C. $\frac{25}{9}$　　D. $\frac{26}{9}$

【答案】B

【解析】方法一：若$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$，

则$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，

即有$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

E，F为BC边的三等分点，

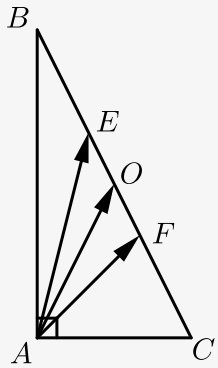
则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\right)=\left(\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)$

$=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}^2+\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}^2+\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{2}{9}\times(1+4)+0=\frac{10}{9}$.

故选：B．

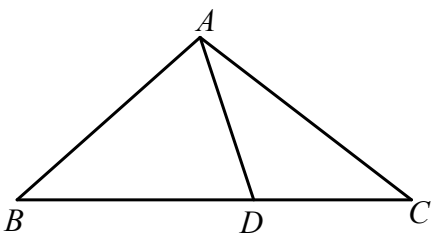
方法二：取BC中点O，



$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}^2-\overrightarrow{OE}^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2=\frac{5}{4}-\frac{5}{36}=\frac{40}{36}=\frac{10}{9}.$$

【标注】【知识点】利用向量数量积求模长；线性运算和数量积综合问题；平面向量的数乘运算及运算规则；向量的模；平面向量基本定理及其意义

4. 如图，在△ABC中，$AD\perp AB$，$\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$，$|\overrightarrow{AD}|=1$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$_____.



【答案】$\sqrt{3}$

【解析】$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\sqrt{3}\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\sqrt{3}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}$，

$\because AD\perp AB$，$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

而在直角△ABD中易知$\overrightarrow{BD}$在$\overrightarrow{AD}$方向上的投影为$|\overrightarrow{BD}|\cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BD}>=|\overrightarrow{AD}|$，

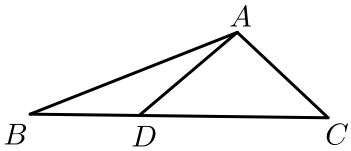
从而$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AD}|^2=1$，

$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\sqrt{3}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}=0+\sqrt{3}=\sqrt{3}.$

【标注】【素养】数学运算

【知识点】用基底法求向量的数量积

5. 如图，在△ABC中，$\angle BAC=120^\circ$，$AB=2$，$AC=1$，D是边BC上的一点，$DC=2BD$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$_____.



【答案】$-\frac{8}{3}$

【解析】$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>=-1$，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{8}{3}$

．

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量数量积的运算律；平面向量数量积运算（非坐标）；线性运算和数量积综合问题

6. 已知菱形$ABCD$的边长为2，$\angle BAD=120^\circ$，点E,F分别在边BC,DC上，$BE=\lambda BC$，$DF=\mu DC$．若$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$，$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=-\frac{2}{3}$，则$\lambda+\mu=$（　）．

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{7}{12}$

【答案】C

【解析】方法一：因为$\angle BAD=120^\circ$，所以

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos 120^\circ=-2$．

因为$BE=\lambda BC$，

所以$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$．

因为$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$，

所以$\left(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\mu\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=1$，

即$2\lambda+2\mu-\lambda\mu=\frac{3}{2}$ ①

同理可得$\lambda\mu-\lambda-\mu=-\frac{2}{3}$ ②，①+②得$\lambda+\mu=\frac{5}{6}$．

方法二：由题意可得$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DF}$

$=2\times2\times\cos 120^\circ+\overrightarrow{AB}\cdot\mu\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AD}\cdot\mu\overrightarrow{AB}$

$=-2+4\mu+4\lambda+\lambda\mu\times2\times2\times\cos 120^\circ$

$=4\lambda+4\mu-2\lambda\mu-2=1$，

$\therefore 4\lambda+4\mu-2\lambda\mu=3$①．

$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{EC}\cdot(-\overrightarrow{FC})=\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{FC}$

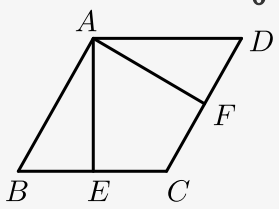
$=(1-\lambda)\overrightarrow{BC}\cdot(1-\mu)\overrightarrow{DC}=(1-\lambda)\overrightarrow{AD}\cdot(1-\mu)\overrightarrow{AB}$

$=(1-\lambda)(1-\mu)\times2\times2\times\cos120^\circ=(1-\lambda-\mu+\lambda\mu)(-2)$

$=-\dfrac{2}{3}$，

即$-\lambda-\mu+\lambda\mu=-\dfrac{2}{3}$②，

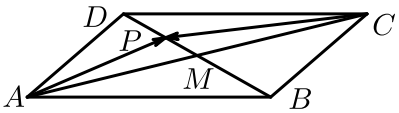
由①②求得$\lambda+\mu=\dfrac{5}{6}$，



故选C．

【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；向量的数量积的定义

7. 如图，平行四边形$ABCD$的两条对角线相交于点M，点P是MD的中点．若$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AD}|=1$，且$\angle BAD=60^\circ$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=$_____．



【答案】$-\dfrac{25}{16}$

【解析】由题意不难求得$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AM}\right)=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$．

则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)\left(-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)$

$=-\dfrac{1}{16}\left(3\overrightarrow{AD}^2+3\overrightarrow{AB}^2+10\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$

$=-\dfrac{1}{16}\left(15+20\times\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{25}{16}$．

故答案为：$-\dfrac{25}{16}$．

【标注】【知识点】向量的数量积的定义

2. 解决向量夹角问题的方法

(1)求向量的夹角时常利用公式$cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$，其中$\theta=<\mathbf{a}，\mathbf{b}>$.

若$<\mathbf{a}，\mathbf{b}>$为锐角，则$0<cos\theta<1$，

$\therefore 0<\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}<1.$

若$<\mathbf{a}，\mathbf{b}>$为钝角，则$-1<cos\theta<0$，

$\therefore -1<\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}<0.$

若$<\mathbf{a}，\mathbf{b}>$为直角，则$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0.$

(2)依据两向量夹角θ的取值情况，求向量坐标中的参数时，需注意当夹角θ为0°时，$cos\theta=1>0$；当夹角θ为180°时，$cos\theta=-1<0$，这是容易忽略的特殊情况.

8. 已知$\vec{a}$，$\vec{b}$是两个非零向量，同时满足$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，求$\vec{b}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角．

【答案】30°．

【解析】由$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$，得$\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2$，

又由$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，得$\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2a\cdot b+\left|\vec{b}\right|^2$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2$．

所以$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=3\left|\vec{a}\right|^2$，

即$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}\left|\vec{a}\right|$．

设b与$a+b$的夹角为θ，

则$\cos\theta=\frac{\vec{b}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}+\vec{b}\right|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}+\vec{b}\right|}$，

$=\frac{\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{a}\right|^2}{\left|\vec{a}\right|\cdot\sqrt{3}\left|\vec{a}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$0^\circ\leqslant\theta\leqslant180^\circ$，所以$\theta=30^\circ$．

【标注】【知识点】向量的夹角的判断；利用向量数量积求夹角

9. 已知$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{3}{4}\pi$，且$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$．

（1）求$\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|$．

（2）求$3\vec{a}+2\vec{b}$与$\vec{a}$的夹角θ的大小．

【答案】（1）$2\sqrt{5}$．

（2）$\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】（1）根据题意，$\vec{a}$与$\vec{b}$所成角为$\frac{3}{4}\pi$，且$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\frac{3}{4}\pi=-2$，

$\therefore\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=9\vec{a}^2+4\vec{b}^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}=20$，

则$\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|=2\sqrt{5}$.

（2）$\because\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=3\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=8$，

$\therefore\cos\theta=\frac{\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}=\frac{8}{2\sqrt{5}\times2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore\theta=\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【标注】【知识点】向量的模；向量的夹角的判断；平面向量数量积的运算律；利用向量数量积求夹角；利用向量数量积求模长

10. 已知向量$\vec{a}=(-2,-1)$，$\vec{b}=(\lambda,1)$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角，试求实数λ的取值范围.

【答案】$\left(-\frac{1}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$.

【解析】$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角的充要条件是$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$且$\vec{a}$与$\vec{b}$不反向共线，

由$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，

得$(-2,-1)\cdot(\lambda,1)=-2\lambda-1<0$，

$\therefore\lambda>-\frac{1}{2}$.

又当$\vec{a}$与$\vec{b}$反向共线时，夹角为$180°$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$，

则$2\lambda+1=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\lambda^2+1}$，解得$\lambda=2$，

则所求实数λ的取值范围为

$\left(-\frac{1}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$.

【标注】【知识点】向量的夹角的判断；数量积的坐标表达式；利用向量数量积求夹角

11. 已知点$A(-1,1)$，$B(1,2)$，$C(-2,-1)$，$D(3,4)$，则向量$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{CD}$方向上的投影为（　）.

A. $-\frac{3\sqrt{15}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$

C. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

【解析】由题意，$\overrightarrow{AB}=(2,1)$，$\overrightarrow{CD}=(5,5)$，

则向量$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{CD}$方向上的投影为：$|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{15}{5\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

．

故选D．

【标注】【知识点】向量的投影

12. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=-6$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为_____．

【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【解析】设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，

∵向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=-6$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，

$\therefore\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2=1+\vec{a}\cdot\vec{b}-8=-6$，$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，

$\therefore\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$，再由$\theta$的范围为$[0,\pi]$，可得$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，

故答案为：$\dfrac{\pi}{3}$．

【标注】【知识点】向量的夹角的判断；利用向量数量积求夹角

3. 求向量的模

求向量$\mathbf{a}=(x_1,y_1)$的模有两种方法：

（1）$|\mathbf{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

（2）$|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}^2}$.

13. 已知$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$120°$，且$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$，求$|\vec{a}+\vec{b}|$．

【答案】$|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{3}$．

【解析】根据题意，$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$120°$，且$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$，

则$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=16-2\times4+4=12$，

则$|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{3}$．

【标注】【知识点】向量的模；平面向量数量积的运算律；向量的数量积的定义；利用向量数量积求模长

14. 设x，$y\in\mathbf{R}$，向量$\vec{a}=(x,1)$，$\vec{b}=(1,y)$，$\vec{c}=(2,-4)$且$\vec{a}\perp\vec{c}$，$\vec{b}//\vec{c}$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$（　）．

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 10

【答案】B

【解析】∵向量$\vec{a}=(x,1)$，$\vec{b}=(1,y)$，$\vec{c}=(2,-4)$且$\vec{a}\perp\vec{c}$，$\vec{b}//\vec{c}$，则有$2x-4=0$，$-4-2y=0$，解得$x=2$，$y=-2$，故$\vec{a}+\vec{b}=(3,-1)$．

故有$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$．

故选B．

【标注】【知识点】利用向量数量积求模长；坐标表示平面向量的垂直

15. 已知向量$\vec{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，向量$\vec{b}=\left(\sqrt{3},1\right)$，则$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$的最大值是_____．

【答案】4

【解析】向量$\vec{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，向量$\vec{b}=\left(\sqrt{3},1\right)$，

$\therefore\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$．

$\therefore\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{4\vec{a}^{2}+\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{4+4+-8\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}\leqslant 4$．

$\therefore\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$的最大值是4．

故答案为：4．

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质；数量积的坐标表达式；利用向量数量积求模长

16. 若$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$_____．

【答案】2

【解析】由题得$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos<\vec{a}\cdot\vec{b}>$

$=1\times\sqrt{2}\times\cos\frac{\pi}{4}$

$=1$，

$\therefore|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a})^2+(\vec{b})^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

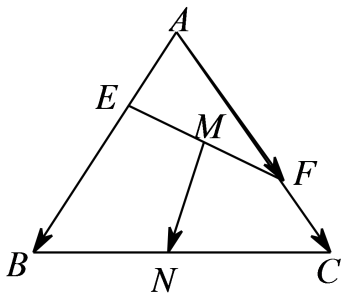
$=1+2+1$

$=4$，

$\therefore|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4}=2$．

【标注】【知识点】向量的模；利用向量数量积求模长；向量的数量积的定义

17. 如图，在边长为1的正三角形ABC中，E，F分别为边AB，AC上的动点，且满足$\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=n\overrightarrow{AC}$，其中$m,n\in(0,1)$，$m+n=1$，$M$，$N$分别是$EF$，$BC$的中点，则$\left|\overrightarrow{MN}\right|$的最小值为（　）．



A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{5}{3}$

【答案】C

【解析】$\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=n\overrightarrow{AC}$，其中$m,n\in(0,1)$，$m+n=1$，$M$，$N$分别是$EF$，$BC$的中点．

所以

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right)=\frac{1}{2}(1-m)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(1-n)\overrightarrow{AC}$

，又$m+n=1$，

所以$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(1-m)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}m\overrightarrow{AC}$，

所以$\left|\overrightarrow{MN}\right|^2=\frac{1}{4}(1-m)^2\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{4}m^2\overrightarrow{AC}^2+\frac{1}{2}(1-m)m\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，$\triangle ABC$是边长为1的等边三角形，

所以上式整理得$\left|\overrightarrow{MN}\right|^2=\frac{1}{4}(1-m)^2+\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{4}(1-m)m=\frac{1}{4}\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{16}$，

所以当$m=\frac{1}{2}$时，$\left|\overrightarrow{MN}\right|^2$最小值为$\frac{3}{16}$，

所以$\left|\overrightarrow{MN}\right|$的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$；

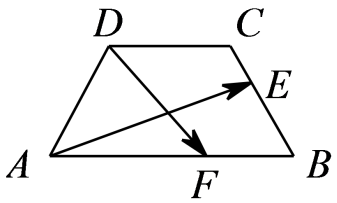
故选：C．

【标注】【知识点】向量的模；平面向量线性运算综合（非坐标）

4. 利用向量的数量积为零表示垂直关系

$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$(其中$\mathbf{a}=(x_1\ ,\ y_1)$，$b=(x_2\ ,\ y_2)$).

18. 如图，等腰梯形$ABCD$中，$AB=4$，$BC=CD=2$，若E，F分别是边BC，AB上的点，且满足$\frac{BE}{BC}=\frac{AF}{AB}=\lambda$，当$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}=0$时，则有（　）．



A. $\lambda\in\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$

B. $\lambda\in\left(\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right)$

C. $\lambda\in\left(\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right)$

D. $\lambda\in\left(\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right)$

【答案】B

【解析】等腰梯形$ABCD$中，$AB=4$，$BC=CD=2$，

可得$\left\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\right\rangle=60°$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4\times2\times\frac{1}{2}=4$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times2\times\frac{1}{2}=2$．

$\because\frac{BE}{BC}=\frac{AF}{AB}=\lambda$，

$\therefore\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}$，

则$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$，

∴

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}=\left(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\lambda\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\lambda^2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\lambda\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

.

即$16\lambda-4-4\lambda^2-2\lambda=0$，

$\therefore 2\lambda^2-7\lambda+2=0$，解得$\lambda=\frac{7+\sqrt{33}}{4}$（舍）或$\lambda=\frac{7-\sqrt{33}}{4}\in\left(\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right)$.

故选：B.

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则

19. 在△PQR中，$\overrightarrow{PQ}=(2,3)$，$\overrightarrow{PR}=(1,k)$，且△$PQR$的一个内角为直角，求$k$的值.

【答案】$-\frac{2}{3}$或$\frac{11}{3}$或$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$或$\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

【解析】（1）当P为直角时，$PQ\perp PR$，

$\therefore\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=0$，即$2+3k=0$，

$\therefore k=-\frac{2}{3}$.

（2）当Q为直角时，$QP\perp QR$，

由$\overrightarrow{QP}=(-2,-3)$，$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}=(-1,k-3)$，

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=0$，得$2-3(k-3)=0$，

$\therefore k=\frac{11}{3}$.

（3）当R为直角时，$RP\perp RQ$，

由$\overrightarrow{RP}=(-1,-k)$，$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}=(1,3-k)$，

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=0$，得$-1-k(3-k)=0$,

$\therefore k=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

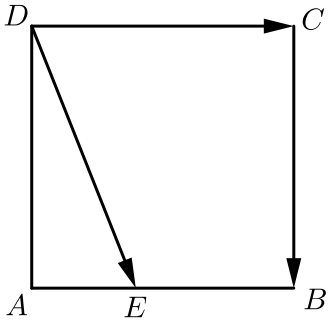
综上所述，k的值为$-\frac{2}{3}$或$\frac{11}{3}$或$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$或$\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直；平面向量数量积运算（非坐标）；数量积的坐标表达式

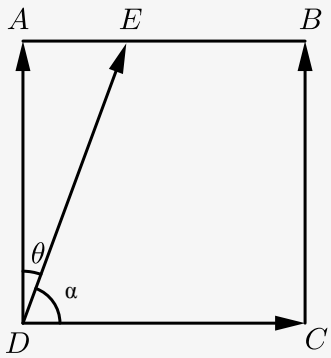
5. 建立平面直角坐标系，利用坐标运算解向量问题

当几何图形中有垂直关系时，可建立平面直角坐标系，利用坐标运算求向量的数量积或长度.

20. 已知正方形$ABCD$的边长为1，点E是AB边上的动点，则$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}$的值为 _____ ；$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$的最大值为 _____ .



【答案】1；1

【解析】方法一： 

根据平面向量的点乘公式$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{DE}|\cdot|\overrightarrow{DA}|\cos\theta$，可知$|\overrightarrow{DE}|\cos\theta=|\overrightarrow{DA}|$，

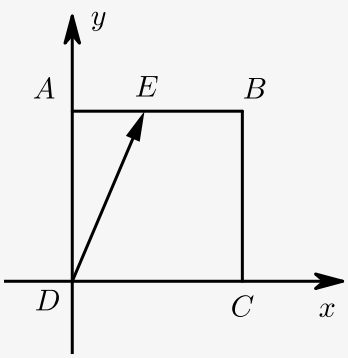
因此$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{DA}|^2=1$；$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{DE}|\cdot|\overrightarrow{DC}|\cos\alpha=|\overrightarrow{DE}|\cdot\cos\alpha$，

而$|\overrightarrow{DE}|\cos\alpha$就是向量$\overrightarrow{DE}$在$\overrightarrow{DC}$边上的射影，

要想让$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$最大，即让射影最大，此时$E$点与$B$点重合，射影为$|\overrightarrow{DC}|$，

所以长度为1．

方法二：以DC，DA所在直线为x轴，y轴建立直角坐标系，



则$D(0,0)$，$C(1,0)$，$A(0,1)$，$B(1,1)$，

设$E(x,1)$，其中$0\leqslant x\leqslant 1$，

$\therefore \overrightarrow{DE}=(x,1)$，$\overrightarrow{CB}=(0,1)$，则$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=1$；

又$\overrightarrow{DC}=(1,0)$，$\therefore \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=x\in[0,1]$，

故$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$的最大值为$1$．

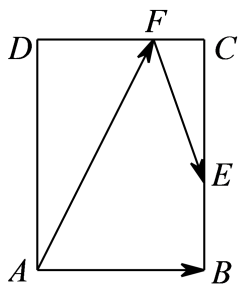
方法三：$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{DE}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CB}\rangle=\left|\overrightarrow{DE}\right|\cos\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CB}\rangle$，由数量积的几何意义知，$\left|\overrightarrow{DE}\right|\cos\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CB}\rangle$表示$\overrightarrow{DE}$在$\overrightarrow{CB}$方向上的投影，长度即为$1$，故$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=1$；

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=\left|\overrightarrow{DE}\right|\left|\overrightarrow{DC}\right|\cos\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CB}\rangle=\left|\overrightarrow{DE}\right|\cos\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CB}\rangle$，由数量积的几何意义知，$\left|\overrightarrow{DE}\right|\cos\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CB}\rangle$表示$\overrightarrow{DE}$在$\overrightarrow{DC}$方向上的投影，投影的最大值为$1$，故$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$的最大值为$1$．

故答案为：1；1．

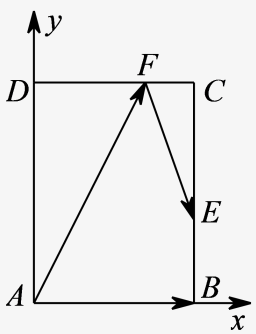
【标注】【知识点】利用投影解决平面向量的数量积

21. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，点E在边BC上，点F在边CD上，若$\overrightarrow{DF}=\lambda\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CE}=\lambda^2\overrightarrow{CB}$，则$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FE}$的最大值为 _____ ．



【答案】$\frac{1}{6}$

【解析】以A为坐标原点，AB所在直线为x轴，AD所在直线为y轴，建立直角坐标系，



可得$A(0,0)$，$B(\sqrt{2},0)$，$C(\sqrt{2},2)$，$D(0,2)$，

设$E(\sqrt{2},n)$，$F(m,2)$，

由$\overrightarrow{DF}=\lambda\overrightarrow{DC}$，可得$m=\sqrt{2}\lambda$，即$F(\sqrt{2}\lambda,2)$，

由$\overrightarrow{CE}=\lambda^2\overrightarrow{CB}$，可得$n=2-2\lambda^2$，即$E(\sqrt{2},2-2\lambda^2)$，

则$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FE}=(\sqrt{2}\lambda,2)\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda,-2\lambda^2)$

$=2\lambda(1-\lambda)-4\lambda^2$

$=-6\lambda^2+2\lambda$

$=-6\left(\lambda-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{6}$，

当$\lambda=\frac{1}{6}$时，则$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FE}$取得最大值$\frac{1}{6}$．

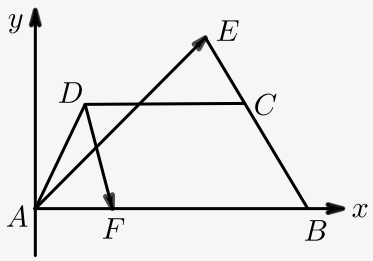
故答案为：$\frac{1}{6}$．

【标注】【知识点】数量积的坐标表达式

22. 在等腰梯形中，$AB//CD$，$AB=2$，$AD=1$，$\angle DAB=60°$，若$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}$，且$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}=-1$，则$\lambda=$_____．

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】如图，



以A为坐标原点，建立平面直角坐标系，

由已知可得$A(0,0)$，$D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$F(2\lambda,0)$，

$B(2,0)$，$\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

设$E(m,n)$，

则$\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{CE}=\left(m-\frac{3}{2},n-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

由$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CE}$，

得$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(3m-\frac{9}{2},3n-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

可得$m=\frac{4}{3}$，$n=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore E\left(\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，

则$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{DF}=\left(2\lambda-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

由$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}=-1$，

得$\frac{4}{3}\left(2\lambda-\frac{1}{2}\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-1$，

解得$\lambda=\frac{1}{4}$．

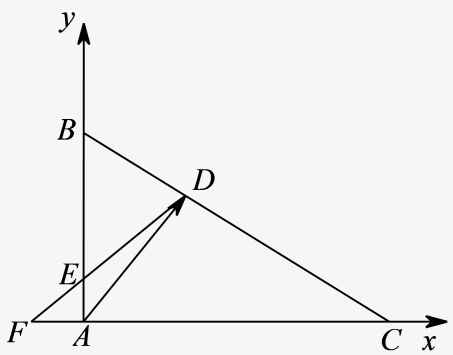
故答案为：$\frac{1}{4}$．

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算

23. 在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=1$，$AC=2$，$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$DE$的延长线交$CA$的延长线于点$F$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}$的值为 _____ ．

【答案】$-\frac{4}{9}$

【解析】如图，分别以AC、AB所在直线为x、y轴建立平面直角坐标系，



则$A(0,0)$，$C(2,0)$，$B(0,1)$，

$\because\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，

$\therefore E\left(0,\frac{1}{3}\right)$，

又$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，得$D\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，

设$F(m,0)$，则$\overrightarrow{DE}=\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(m,-\frac{1}{3}\right)$，

由$\overrightarrow{DE}//\overrightarrow{EF}$，得$-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{m}{3}=0$，即$m=-\frac{2}{3}$，

$\therefore\overrightarrow{AD}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(-\frac{2}{3},0\right)$，

则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{9}$．

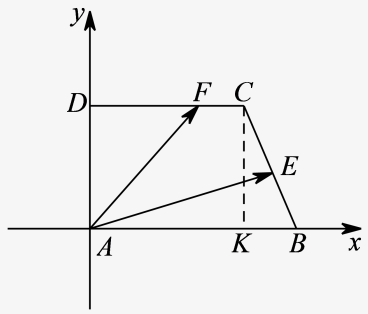
故答案为：$-\frac{4}{9}$．

【标注】【知识点】向量的数量积的定义；线性运算和数量积综合问题

24. 在直角梯形中$ABCD$中，已知$AB//CD$，$AB=3$，$BC=2$，$\angle ABC=60°$，动点E，F分别在线段BC和CD上，且$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DC}=2\lambda\overrightarrow{DF}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的最小值为 _____ ．

【答案】5

【解析】如图所示，



建立直角坐标系，过点C作$CK\perp AB$，垂足为K．

$\because\angle KBC=60°$，$BC=2$，

$\therefore BK=1$，$CK=\sqrt{3}$．

$\therefore DC=AK=3-1=2$，

$\therefore A(0,0)$，$B(3,0)$，$C(2,\sqrt{3})$，$D(0,\sqrt{3})$，

$\because\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DC}=2\lambda\overrightarrow{DF}$，$(0\leqslant\lambda\leqslant1)$．

$\therefore\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=(3-\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

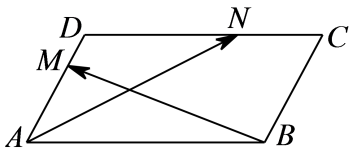
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{DC}=\left(\frac{1}{\lambda},\sqrt{3}\right)$．

$\therefore\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(3-\lambda)\times\frac{1}{\lambda}+3\lambda=3\lambda+\frac{3}{\lambda}-1\geqslant3\times2\sqrt{\lambda\times\frac{1}{\lambda}}-1=5$，当且仅当$\lambda=1$时取等号．

故答案为：5．

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算；平面向量数量积运算（非坐标）

25. 如图，在平行四边形$ABCD$中，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$AB=2$，$AD=1$，若M、N分别是边AD、CD上的点，且满足$\frac{MD}{AD}=\frac{NC}{DC}=\lambda$，其中$\lambda\in[0,1]$，则$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}$的取值范围是（　）．

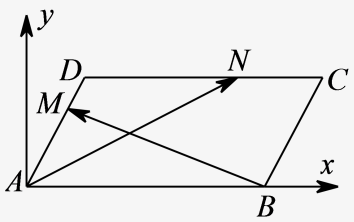


A. $[-3,1]$　　B. $[-3,-1]$　　C. $[-1,1]$　　D. $[1,3]$

【答案】B

【解析】建立如图所示的以A为原点，

AB，AD所在直线为x，y轴的直角坐标系，



则$B(2,0)$，$A(0,0)$，$D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$．

∵满足$\frac{MD}{AD}=\frac{NC}{DC}=\lambda$，$\lambda\in[0,1]$，

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}$，

$=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(1-\lambda)(2,0)$，

$=\left(\frac{5}{2}-2\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AD}$，

$=(-2,0)+(1-\lambda)\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)\right)$，

则$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=\left(\frac{5}{2}-2\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)\right)$，

$=\left(\frac{5}{2}-2\lambda\right)\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\lambda\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)$，

$=\lambda^2+\lambda-3=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$，

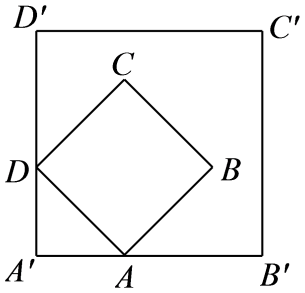
因为$\lambda\in[0,1]$，二次函数的对称轴为：$\lambda=-\frac{1}{2}$，

则$[0,1]$为增区间，

故当$\lambda\in[0,1]$时，$\lambda^2+\lambda-3\in[-3,-1]$．

【标注】【知识点】数量积的坐标表达式

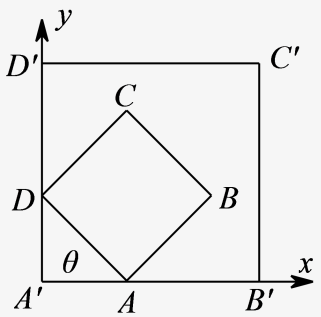
26. 如图所示，边长为1的正方形$ABCD$的顶点A、D分别在边长为2的正方形$A'B'C'D'$的边$A'B'$和$A'D'$上移动，则$\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{A'C}$的最大值是（　）．



A. 2　　B. $1+\sqrt{2}$　　C. π　　D. 4

【答案】A

【解析】如图以A'为坐标原点，$A'B$所在直线为x轴，建立直角坐标系，



令$\angle A'AD=\theta$，由于$AD=1$，故$A'A=\cos\theta$，$A'D=\sin\theta$，

如图$\angle BAx=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，$AB=1$，

故$x_B=\cos\theta+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta+\sin\theta$，

故$B=(\cos\theta+\sin\theta,\cos\theta)$，

$y_B=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$，

故$\overrightarrow{A'B}=(\cos\theta+\sin\theta,\cos\theta)$，

同理可求得$C(\sin\theta,\cos\theta+\sin\theta)$，

即$\overrightarrow{A'C}(\sin\theta,\cos\theta+\sin\theta)$，

$\therefore\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{A'C}=(\cos\theta+\sin\theta,\cos\theta)\cdot(\sin\theta,\cos\theta+\sin\theta)=1+\sin 2\theta$，

当$\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，$\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{A'C}$的最大值是$2$．

故选A．

【标注】【知识点】数量积的坐标表达式；求固定区间正弦型函数值域