

平面向量定义与线性运算

一轮整合计划

三角函数的图像和性质

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图象			
定义域			
值域			
对称轴			
对称中心			
奇偶性			
最小正周期			
单调递增区间			
单调递减区间			

请默写和差倍角公式和辅助角公式

和差角公式：

(1) $\sin(\alpha \pm \beta) =$ _____;

(2) $\cos(\alpha \pm \beta) =$ _____;

(3) $\tan(\alpha \pm \beta) =$ _____

变形式 $\tan \alpha \pm \tan \beta = \tan(\alpha \pm \beta)(1 \mp \tan \alpha \tan \beta)$ ($\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$).

倍角公式：

(1) $\sin 2\alpha =$ _____;

变形式 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

$$(2) \cos 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}} = 1 - \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} - 1;$$

$$\text{变形形式} \cos^2 \alpha = \underline{\hspace{2cm}}; \sin^2 \alpha = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3) \tan 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}.$$

辅助角公式：

$$y = a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi),$$

其中 φ 所在的象限由 a 、 b 的符号确定， φ 角的值由 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ 确定。

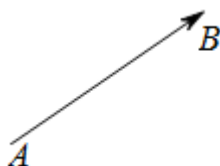
一、 平面向量的基本概念

1. 向量的概念：我们把具有大小和方向的量称为向量。

2. 向量的表示：

① 几何表示法：用有向线段表示向量，有向线段的方向表示向量的方向，线段的长度表示向量的长度。

② 字母表示法： $\overrightarrow{AB}$ ，注意起点在前，终点在后。



3. 相等和相反向量：

① 同向且等长的有向线段表示同一向量或相等向量。

② 与向量 $\vec{a}$ 方向相反且等长的向量叫做 $\vec{a}$ 的相反向量，记作 $-\vec{a}$ 。

4. 共线或平行向量：通过有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的直线，叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 的基线。如果向量的基线互相平行或重合，则称这些向量共线或平行。向量 $\vec{a}$ 平行于向量 $\vec{b}$ ，记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 。

5. 零向量：长度等于零的向量，叫做零向量。记作： $\vec{0}$ 。

零向量的方向不确定，零向量与任意向量平行。

6. 单位向量：长度等于1的向量叫做单位向量。

7. 向量的模：向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小(或长度)叫做向量的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 。

1. 下列向量中不是单位向量的是 ()。

A. $(-1, 0)$

B. $(1, 1)$

C. $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} (|\vec{a}| \neq 0)$

D. $(\cos 2019^\circ, \sin 2019^\circ)$

2. 下列命题正确的是 () .

- A. 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 都是单位向量, 则 $\vec{a} = \vec{b}$
- B. 若 $\vec{AB} = \vec{DC}$, 则四点 A、B、C、D 构成平行四边形
- C. 若 $\vec{b} = -2\vec{a} (\vec{a} \neq \vec{0})$, 则 $\vec{a}$ 是 $\vec{b}$ 的相反向量
- D. $\vec{AB}$ 与 $\vec{BA}$ 是两平行向量

3. 下列说法中, 正确的是 () .

- A. 只有方向相同或相反的向量是平行向量
- B. 零向量的长度为 0
- C. 长度相等的两个向量是相等向量
- D. 共线向量是在一条直线上的向量

4. 下列命题中, 是假命题的是 () .

- A. $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- B. k 为实数, 若 $k\vec{a} = \vec{0}$, 则 $k = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$
- C. 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直, $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 垂直, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 垂直
- D. $\vec{a} \neq \vec{0}$, 若 $n\vec{a} = m\vec{b} (m, n \in \mathbf{R} \text{ 且 } m \neq n)$, 则 $\vec{a} \neq \vec{b}$

5. 下列说法中正确的是 () .

- A. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, 则 $\vec{b} = \vec{c}$
- B. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$
- C. 若不平行两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$
- D. 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

6. 以下说法错误的是 () .

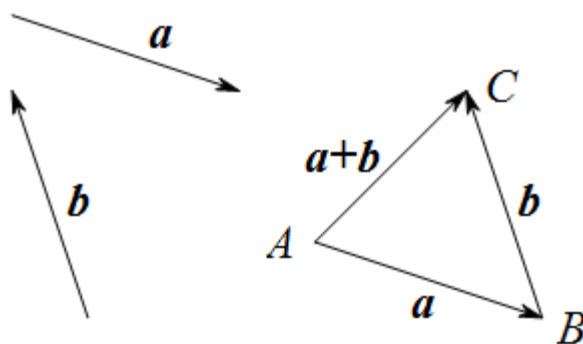
- A. 零向量与任一非零向量平行
- B. 零向量与单位向量的模不相等
- C. 平行向量方向相同
- D. 平行向量一定是共线向量

二、 平面向量的线性运算

加法

(1) 三角形法则

如下图:



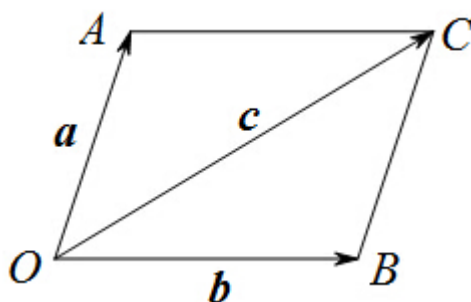
已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，在平面内任取一点 A ，作 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作 $\vec{a} + \vec{b}$ ，即 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 。

求两个向量和的运算，叫做向量的加法。这种求向量和的方法，称为向量加法的三角形法则。

位移的合成可以看作向量加法三角形法则的物理模型。

(2) 平行四边形法则

如下图：



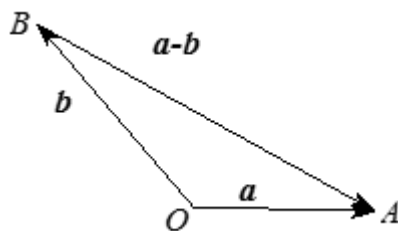
以同一点 O 为起点的两个已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为邻边作 $ABCD$ ，则以 O 为起点的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，我们把这种作两个向量和的方法叫做向量加法的平行四边形法则。

(3) 向量求和的多边形法则：

已知 n 个向量，依次把这 n 个向量首尾相连，以第一个向量的始点为始点，第 n 个向量的终点为终点的向量叫做这个向量的和向量。这个法则叫做向量求和的多边形法则。

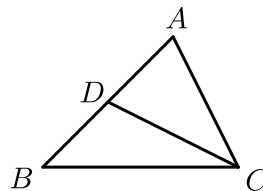
减法

如果把两个向量的始点放在一起，则这两个向量的差是以减向量的终点为始点，被减向量的终点为终点的向量。又或者一个向量减去另一个向量等于加上这个向量的相反向量。



- C. $\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
 D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

12. 如图所示, D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点, 则向量 $\overrightarrow{CD} = (\quad)$.



- A. $-\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
 B. $-\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
 C. $\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
 D. $\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

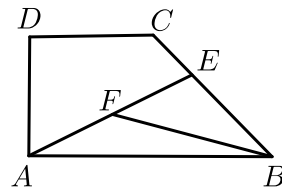
13. 设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BP}$, 则 $(\quad)$.

- A. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$
 B. $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} = \vec{0}$
 C. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$
 D. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

14. 已知正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别是 DC, BC 的中点, 那么 $\overrightarrow{EF} = (\quad)$.

- A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
 B. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
 C. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
 D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

15. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB = 2AD = 2DC$, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC}$, F 为 AE 的中点, 则 $\overrightarrow{BF} = (\quad)$.

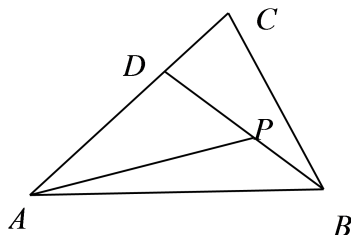


- A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
 B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
 C.

$$-\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$$

D. $-\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD}$

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AC}$, $\vec{BP} = \frac{1}{3}\vec{BD}$, 若 $\vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$, 则 $\frac{\lambda}{\mu}$ 的值为 _____.



17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$, 若 $\vec{BD} = 2\vec{DC}$, $\vec{AE} = \lambda\vec{AC} - \vec{AB}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), 且 $\vec{AD} \cdot \vec{AE} = -4$.

- (1) 求向量 $\vec{AB}$ 在向量 $\vec{CA}$ 方向上的投影.
(2) 求实数 λ 的值.

三、平面向量的基本定理

基本定理

如果 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于这一平面内的任意向量 $\vec{a}$, 有且只有一对实数 λ_1 、 λ_2 , 使 $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$.

我们把不共线的向量 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

小结: 已知 A 、 B 是直线 l 上的任意两点, O 是 l 外一点, 则对直线 l 上任意一点 P , 存在实数 t , 使 $\vec{OP}$ 关于基底 $\{\vec{OA}, \vec{OB}\}$ 的分解式为 $\vec{OP} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$.

18. 在下列向量组中, 可以把向量 $\vec{a} = (3, 2)$ 表示出来的是 ().

- A. $\vec{e}_1 = (0, 0)$, $\vec{e}_2 = (1, 2)$
B. $\vec{e}_1 = (-1, 2)$, $\vec{e}_2 = (5, -2)$
C. $\vec{e}_1 = (3, 5)$, $\vec{e}_2 = (6, 10)$
D. $\vec{e}_1 = (2, -3)$, $\vec{e}_2 = (-2, 3)$

坐标运算

若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1),$$

$$\text{若 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

19. 已知点 $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ 和向量 $\vec{a} = (2, \lambda)$, 若 $\vec{a} // \overrightarrow{AB}$, 则实数 λ 的值为 ().

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{3}{2}$

20. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, 则 $2\vec{a} - \vec{b} = ()$.

- A. $(3, 0)$ B. $(2, 0)$
C. $(-3, 3)$ D. $(3, 3)$

21. 与 $\vec{a} = (12, 5)$ 平行的单位向量为 ().

- A. $\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$
B. $\left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$
C. $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ 或 $\left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$
D. $\left(\pm\frac{12}{13}, \pm\frac{5}{13}\right)$

22. 已知点 $A(-1, -2)$, $B(3, 8)$, 若 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, 则点 C 的坐标为 _____.

23. 已知 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (1, -2)$, 若 $m\vec{a} + n\vec{b} = (9, -8)$ ($m, n \in \mathbf{R}$), 则 $m - n$ 的值为 ().

- A. 2 B. -2 C. 3 D. -3

24. 已知平面向量 $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{b} = (4, -2)$, $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直, 则 $\lambda = ()$.

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

25. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ().

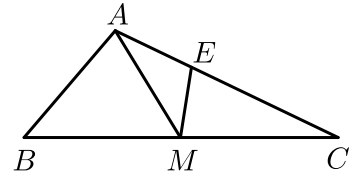
- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

26. 已知 O 是平面内一定点, A, B, C 是平面内不共线的三个点, 若动点 P 满足

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right), \lambda \in [0, +\infty), \text{ 则 } P \text{ 点的轨迹一定通过 } \triangle ABC \text{ 的 } ().$$

- A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

27. 已知点 M 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点, 点 E 在边 AC 上, 且 $\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{AE}$, 则向量 $\overrightarrow{EM} = ()$.



- A. $\frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AB}$
 B. $\frac{1}{6}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$
 C. $\frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AB}$
 D. $\frac{1}{6}\vec{AC} + \frac{3}{2}\vec{AB}$

28. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, -3)$, 若向量 $\vec{c}$ 满足 $(\vec{c} + \vec{a}) \parallel \vec{b}$, $\vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 则 $\vec{c} =$ () .

- A. $\left(-\frac{7}{9}, -\frac{7}{3}\right)$ B. $\left(\frac{7}{9}, \frac{7}{3}\right)$
 C. $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{9}\right)$ D. $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{7}{9}\right)$

29. 已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (1, 1)$, $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$, 如果 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 那么实数 $\lambda =$ () .

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

30. 已知 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (-2, 5)$, 则 $3\vec{a} - 2\vec{b} =$ () .

- A. (2, 7) B. (13, -7)
 C. (2, -7) D. (13, 13)

31. 已知向量 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (x, -2)$, $\vec{c} = (0, 2)$, 若 $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$, 则实数 x 的值为 () .

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $-\frac{4}{3}$

32. 已知向量 $\vec{a} = (t, 1)$ 与 $\vec{b} = (4, t)$ 共线且方向相同, 则 $|\vec{a} + 3\vec{b}|^2 - |2\vec{a} - \vec{b}|^2 =$ () .

- A. 235 B. 240 C. 245 D. 255

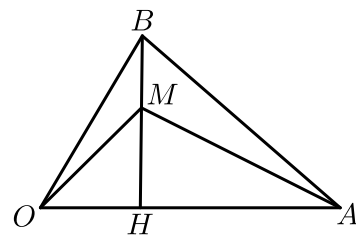
33. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项为正数的等比数列, 向量 $\vec{m} = (a_5, 27)$, $\vec{n} = (3, a_9)$, 且 $\vec{m} \parallel \vec{n}$, 则 $\log_3 a_7 =$ () .

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

34. 已知 $P_1(2, -1)$, $P_2(0, 5)$ 且点 P 在 P_1P_2 的延长线上, $|\vec{P_1P}| = 2|\vec{PP_2}|$, 则 P 点坐标为 () .

- A. (-2, 11) B. $\left(\frac{4}{3}, 3\right)$
 C. $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$ D. (2, -7)

35. 如图所示：在 $\triangle AOB$ 中， $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ ， $OA = 3$ ， $OB = 2$ ， $BH \perp OA$ 于 H ， M 为线段 BH 上的点，且 $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{5}{4}$ ，若 $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BO} + y\overrightarrow{BA}$ ，则 $x + y$ 的值等于_____。



36. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知向量 $\vec{a} = (\cos x, \sin x)$ ， $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$ ， $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ 。
- (1) 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，求 x 的值。
- (2) 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$ ，求 $\cos x$ 的值。