

04导数解答3练习题

1. 2019~2020学年天津宝坻区高三上学期期末第20题16分 ★★★

已知函数 $f(x) = \ln(ex) + \frac{1}{2}ax^2 + (a+1)x$ (e 为自然对数的底数) .

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

(3) 当 $a < 0$ 时, 证明 $f(x) \leq -\frac{3}{2a} - 1$.

【答案】 (1) $8x - 2y - 1 = 0$.

(2) 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增, 在区间 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 单调递减 .

(3) 证明见解析 .

【解析】 (1) 当 $a = 1$ 时,

$$f(x) = \ln(ex) + \frac{1}{2}x^2 + 2x,$$

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{1}{x} + x + 2,$$

$$\text{所以 } k = f'(1) = \frac{1}{1} + 1 + 2 = 4,$$

$$\text{又 } f(1) = \frac{7}{2},$$

$$\text{所以曲线在点 } (1, f(1)) \text{ 处的切线方程为 } y - \frac{7}{2} = 4(x - 1),$$

$$\text{即 } 8x - 2y - 1 = 0.$$

$$(2) \text{ 易得 } f'(x) = \frac{1}{x} + ax + a + 1 = \frac{ax^2 + (a+1)x + 1}{x} = \frac{(ax+1)(x+1)}{x} (x > 0).$$

① 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{1}{a}$,

则当 $0 < x < -\frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增;

当 $x > -\frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减 .

综上所述, 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

③ 当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增, 在区间 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减 .

(3) 由 (2) 知, 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = -\frac{1}{a}$ 处取得最大值,

$$\text{即 } f(x)_{\max} = f\left(-\frac{1}{a}\right) = \ln\left(-\frac{e}{a}\right) + \frac{a}{2} \times \frac{1}{a^2} + (a+1)\left(-\frac{1}{a}\right)$$

$$= \ln\left(-\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{2a},$$

$$\text{则 } f(x) \leq -\frac{3}{2a} - 1, \text{ 等价于 } f(x)_{\max} \leq -\frac{3}{2a} - 1,$$

$$\text{即 } \ln\left(-\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{2a} \leq -\frac{3}{2a} - 1,$$

$$\text{即 } \ln\left(-\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a} + 1 \leq 0 \quad (*) ,$$

$$\text{令 } t = -\frac{1}{a}, \text{ 则 } t > 0,$$

$$\text{不妨设 } g(t) = \ln t - t + 1 \quad (t > 0),$$

$$\text{所以 } g'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t} \quad (t > 0).$$

$$\text{从而, 当 } t \in (0, 1) \text{ 时, } g'(t) > 0;$$

$$\text{当 } t \in (1, +\infty) \text{ 时, } g'(t) < 0,$$

所以函数 $g(t)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增; 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

$$\text{故当 } t = 1 \text{ 时, } g(t)_{\max} = g(1) = 0,$$

$$\text{所以当 } t > 0 \text{ 时, 总有 } g(t) \leq g(t)_{\max} = 0,$$

$$\text{即当 } a < 0 \text{ 时, 不等式 } (*) \text{ 总成立,}$$

$$\text{故当 } a < 0 \text{ 时, } f(x) \leq -\frac{3}{2a} - 1 \text{ 成立.}$$

【标注】【知识点】导数的几何意义; 求在某点处的切线方程; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用导数解决不等式恒成立问题

2. 2016年安徽池州高三一模理科第21题12分 ★★★

设函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x=e$ 处的切线与 y 轴相交于点 $(0, 2-e)$ 求 a 的值. (e 为自然对数的底数, $e = 2.781828\dots$).

(2) 当 $a \leq 2$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(3) 当 $1 < x < 2$ 时, 证明: $\frac{2}{x-1} > \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln(2-x)}$.

【答案】 (1) $a = 2$.

(2) 当 $a \leq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 的定义域上为增函数.

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 - a, x \in (0, +\infty)$,

$$\text{由题意可知: } \frac{f(e) - f(2-e)}{e-0} = f'(e),$$

$$\text{整理得: } e + 1 - a(e-1) - (2-e) = e \left(1 + \frac{1}{e} + 1 - a\right),$$

$$\text{解得 } a = 2.$$

$$(2) f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 - a, \text{ 记 } g(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 - a,$$

$$g'(x) = \frac{x-1}{x^2}, \text{ 令 } g'(x) = 0, x = 1,$$

$$\therefore g(x)_{\min} = g(1) = 2 - a,$$

$$\therefore a \leq 2,$$

$$\therefore 2-a \geq 0,$$

$$\therefore g(x) \geq g(1) = 0, f'(x) \geq 0,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域上为增函数.

(3) 由(2)知当 $a=2$ 时, $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上是增函数,

$$\therefore f(x) > f(1) = 0, \text{ 即 } (x+1)\ln x > 2(x-1),$$

$$\therefore \frac{1}{\ln x} < \frac{x+1}{2(x-1)} \quad \text{①},$$

$$\therefore 1 < x < 2,$$

$$\therefore 0 < 2-a < 1, \frac{1}{2-x} > 1,$$

$$\therefore \frac{1}{\ln \frac{1}{2-x}} < \frac{\frac{1}{2-x} + 1}{2\left(\frac{1}{2-x} - 1\right)} = \frac{3-x}{2(x-1)},$$

$$\text{即 } -\frac{1}{\ln(2-x)} < \frac{3-x}{2(x-1)} \quad \text{②},$$

$$\text{①+②得: } \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln(2-x)} < \frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{3-x}{2(x-1)} = \frac{2}{x-1},$$

$\therefore$ 原式成立.

【标注】【知识点】分析法；已知切线方程求参数；导数的几何意义；利用导数求函数的单调性、单调区间