

## 04导数解答3

### 1. 不等式证明

#### 1. 2018~2019学年北京东城区北京市第二中学高二下学期期末第20题14分 ★★★

已知函数  $f(x) = x^2 + ax - \ln x$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 任意个数  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上是减函数, 求实数  $a$  的取值范围.

(2) 令  $g(x) = f(x) - x^2$ , 是否存在实数  $a$ , 当  $x \in (0, e]$  ( $e$  是自然常数) 时, 函数  $g(x)$  的最小值是 3, 若存在, 求出  $a$  的值; 若不存在, 说明理由.

(3) 当  $x \in (0, e]$  时, 证明:  $e^2 x^2 - \frac{5}{2}x > (x+1)\ln x$ .

**【答案】** (1)  $a \leq -\frac{7}{2}$ .

(2) 存在,  $a = e^2$ .

(3) 证明见解析.

**【解析】** (1)  $f'(x) = 2x + a - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + ax - 1}{x} \leq 0$  在  $[1, 2]$  上恒成立,

令  $h(x) = 2x^2 + ax - 1$ ,

则  $\begin{cases} h(1) \leq 0 \\ h(2) \leq 0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} 2 + a - 1 \leq 0 \\ 8 + 2a - 1 \leq 0 \end{cases}$ ,

解得:  $a \leq -\frac{7}{2}$ .

(2) 假设存在实数  $a$ ,

使得  $g(x) = f(x) - x^2 = ax - \ln x$ ,  $x \in (0, e]$  有最小值 3,

$g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}$ ,

① 当  $0 < \frac{1}{a} < e$ , 即  $a > \frac{1}{e}$  时,

令  $g'(x) > 0$ , 解得:  $x > \frac{1}{a}$ ;

令  $g'(x) < 0$ , 解得:  $0 < x < \frac{1}{a}$ ,

$\therefore$  函数  $g(x)$  在  $(0, \frac{1}{a})$  上单调递减, 在  $(\frac{1}{a}, e]$  上单调递增,

$\therefore g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a = 3$ ,

解得:  $a = e^2$ , 符合条件;

② 当  $\frac{1}{a} \geq e$ , 即  $a \leq \frac{1}{e}$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  在  $(0, e]$  上单调递减,

$\therefore g(x)_{\min} = g(e) = ae - 1 = 3$ ,

解得:  $a = \frac{4}{e}$  (舍去),

综上所述, 存在实数  $a = e^2$ , 使得  $x \in (0, e]$  时函数  $g(x)$  有最小值 3.

(3) 方法一: 令  $F(x) = e^2 x - \ln x$ , 由 (2) 得:  $F(x)_{\min} = 3$ ,

令  $w(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{5}{2}$ , 则  $w'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ,

当  $0 < x \leq e$  时,  $w'(x) > 0$ ,  $w(x)$  在  $(0, e]$  单调递增,

$$\text{故 } e^2 x - \ln x > \frac{\ln x}{x} + \frac{5}{2},$$

$$\text{即: } e^2 x^2 - \frac{5}{2}x > (x+1)\ln x.$$

方法二: 当  $x \in (0, e]$  时,

$$\text{欲让 } e^2 x^2 - \frac{5}{2}x > (x+1)\ln x,$$

$$\text{又易让得 } \ln x \leq x-1, (x+1)\ln x \leq (x+1)(x-1). (x+1)\ln x \leq x^2-1.$$

$$\text{故只需让 } e^2 x^2 - \frac{5}{2}x > x^2-1.$$

$$\text{即让 } (e^2-1)x^2 - \frac{5}{2}x + 1 > 0.$$

$$\text{又 } x_{\text{对}} = -\frac{-\frac{5}{2}}{2(e^2-1)} = \frac{5}{4(e^2-1)} \in (0, e],$$

$$\text{故只需让 } \Delta = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4(e^2-1) \cdot 1 < 0.$$

$$\text{即让 } \frac{25}{4} - 4(e^2-1) < 0. \text{ 显然成立.}$$

**【标注】**【知识点】已知最值情况求参数值或解析式; 利用导数解决不等式恒成立问题

2. 2020~2021学年11月天津南开区天津市南开中学高三上学期月考(统练6)第20题12分 ★★★

已知函数  $f(x) = (x+b)(e^x - a)$ , ( $b > 0$ ) 在  $(-1, f(-1))$  处的切线方程为  $(e-1)x + ey + e-1 = 0$ .

(1) 求  $a, b$ .

(2) 若方程  $f(x) = m$  有两个实数根  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 证明:  $x_2 - x_1 \leq 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}$ .

**【答案】** (1) 见解析

(2) 见解析

**【解析】** (1) 解: 在  $(-1, f(-1))$  处的切线方程为  $(e-1)x + ey + e-1 = 0$ , 可得

$$f(-1) = 0, \text{ 即 } f(-1) = (-1+b)(e^{-1} - a) = 0,$$

$$\text{又函数 } f(x) = (x+b)(e^x - a), (b > 0),$$

$$\text{可得导数为 } f'(x) = (x+b+1)e^x - a, \text{ 所以 } f'(-1) = \frac{b}{e} - a = -1 + \frac{1}{e},$$

$$\text{若 } a = \frac{1}{e}, \text{ 则 } b = 2 - e < 0, \text{ 与 } b > 0 \text{ 矛盾,}$$

$$\text{故 } a = b = 1.$$

(2) 证明: 由(1)可知  $f(x) = (x+1)(e^x - 1)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(-1) = 0$ ,

$$\text{设 } f(x) \text{ 在 } (-1, 0) \text{ 处的切线方程为 } h(x) = k(x+1),$$

$$\text{易得 } k = f'(-1) = \frac{1}{e} - 1, \text{ 则 } h(x) = \left(\frac{1}{e} - 1\right)(x+1),$$

$$\text{令 } F(x) = f(x) - h(x),$$

$$\text{即 } F(x) = (x+1)(e^x - 1) - \left(\frac{1}{e} - 1\right)(x+1), F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e},$$

$$\text{当 } x \leq -2 \text{ 时, } F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e} \leq -\frac{1}{e} < 0,$$

当  $x > -2$  时 ,

设  $G(x) = F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e}$  ,  $G'(x) = (x+3)e^x > 0$  ,

故函数  $F'(x)$  在  $(-2, +\infty)$  上单调递增 , 又  $F'(-1) = 0$  ,

所以当  $x \in (-\infty, -1)$  时 ,  $F'(x) < 0$  , 当  $x \in (-1, +\infty)$  时 ,  $F'(x) > 0$  ,

所以函数  $F(x)$  在区间  $(-\infty, -1)$  上单调递减 , 在区间  $(-1, +\infty)$  上单调递增 ,

故  $F(x) \geq F(-1) = 0$  ,

$f(x_1) \geq h(x_1)$  ,

设  $h(x) = m$  的根为  $x_1'$  , 则  $x_1' = -1 + \frac{me}{1-e}$  ,

又函数  $h(x)$  单调递减 , 故  $h(x_1') = f(x_1) \geq h(x_1)$  , 故  $x_1' \leq x_1$  ,

设  $y = f(x)$  在  $(0, 0)$  处的切线方程为  $y = t(x)$  , 易得  $t(x) = x$  ,

令  $T(x) = f(x) - t(x) = (x+1)(e^x - 1) - x$  ,  $T'(x) = (x+2)e^x - 2$  ,

当  $x \leq -2$  时 ,  $T'(x) = (x+2)e^x - 2 \leq -2 < 0$  ,

当  $x > -2$  时 ,

设  $H(x) = T'(x) = (x+2)e^x - 2$  ,  $H'(x) = (x+3)e^x > 0$  ,

故函数  $T'(x)$  在  $(-2, +\infty)$  上单调递增 , 又  $T'(0) = 0$  ,

所以当  $x \in (-\infty, 0)$  时 ,  $T'(x) < 0$  , 当  $x \in (0, +\infty)$  时 ,  $T'(x) > 0$  ,

所以函数  $T(x)$  在区间  $(-\infty, 0)$  上单调递减 , 在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增 ,

$T(x) \geq T(0) = 0$  ,

$f(x_2) \geq t(x_2)$  ,

设  $t(x) = m$  的根为  $x_2'$  , 则  $x_2' = m$  ,

又函数  $t(x)$  单调递增 , 故  $t(x_2') = f(x_2) \geq t(x_2)$  , 故  $x_2' \geq x_2$  ,

又  $x_1' \leq x_1$  ,

则  $x_2 - x_1 \leq x_2' - x_1' = m - \left(-1 + \frac{me}{1-e}\right) = 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}$  .

**【标注】**【知识点】已知切线方程求参数；双变量问题

3. 2019~2020学年10月山东烟台莱州市莱州第一中学高三上学期月考第23题15分 ★★★

已知函数  $f(x) = \frac{1 + \ln(1+x)}{x} (x > 0)$  .

( 1 ) 判断函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的单调性 .

( 2 ) 若  $f(x) > \frac{k}{x+1}$  恒成立 , 求整数  $k$  的最大值 .

( 3 ) 求证 :  $(1+1 \times 2)(1+2 \times 3) \cdots [1+n(n+1)] > e^{2n-3}$  .

**【答案】** ( 1 ) 在  $(0, +\infty)$  上是减函数 .

( 2 ) 3 .

( 3 ) 证明见解析 .

【解析】(1) 依题意,  $f'(x) = \frac{-\frac{1}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$ ,

$\because x > 0$ ,

$\therefore -\frac{1}{1+x} < 0, \ln(1+x) > 0, x^2 > 0$ ,

$\therefore f'(x) < 0$ ,

$\therefore$  函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数.

(2)  $f(x) > \frac{k}{x+1}$  恒成立,

即  $h(x) = \frac{(x+1)[1+\ln(x+1)]}{x} > k$  恒成立, 即  $h(x)_{\min} > k$ ,

而  $h'(x) = \frac{x-1-\ln(x+1)}{x^2}$ , 令  $g(x) = x-1-\ln(x+1) (x > 0)$ ,

则  $g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0$ ,

$\therefore$  函数  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单增,

又  $g(2) = 1 - \ln 3 < 0, g(3) = 2 - 2\ln 2 > 0$ ,

故  $g(x) = 0$  存在唯一实数根  $a$ , 且满足  $a \in (2, 3), a = 1 + \ln(a+1)$ ,

当  $x > a$  时,  $g(x) > 0, h'(x) > 0$ ,

当  $0 < x < a$  时,  $g(x) < 0, h'(x) < 0$ ,

$\therefore h(x)_{\min} = h(a) = \frac{(a+1)[1+\ln(a+1)]}{a} = a+1 \in (3, 4)$ ,

故整数  $k$  的最大值为 3.

(3) 由 (2) 可得,  $\frac{1+\ln(x+1)}{x} > \frac{3}{x+1}$ ,

即  $\ln(x+1) > \frac{3x}{x+1} - 1 = 2 - \frac{3}{x+1}$ ,

令  $x = n(n+1)$ ,

则  $\ln[1+n(n+1)] > 2 - \frac{3}{n(n+1)+1} > 2 - \frac{3}{n(n+1)}$

$= 2 - 3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ ,

$\therefore \ln(1+1 \times 2) > 2 - 3\left(1 - \frac{1}{2}\right), \ln(1+2 \times 3) > 2 - 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), \dots, \dots$

$\ln[1+n(n+1)] > 2 - 3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ ,

$\therefore \ln(1+1 \times 2) + \ln(1+2 \times 3) + \dots + \ln[1+n(n+1)]$

$> 2n - 3\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 2n - 3\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2n - 3 + \frac{3}{n+1} > 2n - 3$ ,

$\therefore (1+1 \times 2)(1+2 \times 3) \cdots [1+n(n+1)] > e^{2n-3}$ , 即得证.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式

#### 4. 2019~2020学年山东济南高三上学期期末 ★★★

已知函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + k$  的极大值为  $\frac{1+e}{e}$ , 其中  $e = 2.71828 \dots$  为自然对数的底数.

(1) 求实数  $k$  的值.

(2) 若函数  $g(x) = e^x - \frac{a}{x}$ , 对任意  $x \in (0, +\infty)$ ,  $g(x) \geq af(x)$  恒成立.

(i) 求实数  $a$  的取值范围;

(ii) 证明:  $x^2 f(x) > a \sin x + x^2 - 1$ .

【答案】(1) 见解析

(2) 见解析

【解析】(1)  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ,  $x > 0$ ,

当  $x \in (0, e)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增; 当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减,

所以  $f(x)$  的极大值为  $f(e) = \frac{1}{e} + k = \frac{1}{e} + 1$ ,

故  $k = 1$ .

(2) (i) 根据题意, 对任意  $x \in (0, +\infty)$ ,  $g(x) \geq af(x)$ , 即  $e^x - \frac{a}{x} \geq \frac{a \ln x}{x} + a$ ,

化简得  $xe^x - a \ln x - ax - a \geq 0$ , 令  $h(x) = xe^x - a \ln x - ax - a$ ,  $x > 0$ ,

整理得  $h(x) = e^{\ln x} e^x - a \ln x - ax - a = e^{\ln x + x} - a(\ln x + x) - a$ ,

令  $\ln x + x = t$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , 设  $H(t) = e^t - at - a$ , 则  $H'(t) = e^t - a$ , 只需

$H(t) \geq 0$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ,

当  $a < 0$  时, 当  $t < 0$  时,  $H(t) < 1 - at - a$ , 所以

$H\left(\frac{1}{a} - 1\right) < 1 - a\left(\frac{1}{a} - 1\right) - a = 0$ , 不成立;

当  $a = 0$  时,  $H(t) \geq 0$  显然成立;

当  $a > 0$  时, 由  $H'(t) = e^t - a$ , 当  $t \in (-\infty, \ln a)$  时,  $H(t)$  递减, 当  $t \in (\ln a, +\infty)$  时,  $H(t)$  递增,

所以  $H(t)$  的最小值为  $H(\ln a) = a - a \ln a - a = -a \ln a$ ,

由  $H(\ln a) = -a \ln a \geq 0$ , 得  $0 < a \leq 1$ ,

综上  $0 \leq a \leq 1$ ;

(ii) 证明: 要证  $x^2 f(x) > a \sin x + x^2 - 1$ , 只需证明

$x^2 \left( \frac{\ln x}{x} + 1 \right) > a \sin x + x^2 - 1$ ,

化简得  $x \ln x + 1 > a \sin x$ , 只需证  $\ln x + \frac{1}{x} > \frac{a \sin x}{x}$ ,

设  $F(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ ,  $G(x) = x - \sin x$ ,

由  $F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ , 当  $x \in (0, 1)$  时,  $F(x)$  递减; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,

$F(x)$  递增,

所以  $F(x) \geq F(1) = 1$ ,

由  $G'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ , 得  $G(x)$  在  $(0, +\infty)$  上递增, 故  $G(x) > G(0) = 0$ , 得

$x > \sin x$ ,

又由 (i)  $0 \leq a \leq 1$ , 所以  $\frac{a \sin x}{x} < 1$ ,

所以  $F(x) > \frac{a \sin x}{x}$  成立 ,

故原命题成立 .

**【标注】**【知识点】已知极值情况求函数解析式；不等式中的恒成立与能成立问题

5. 2020~2021学年10月天津和平区天津市耀华中学高三上学期月考第22题16分 ★★★

已知函数  $f(x) = \sin^2 x \cdot \sin 2x$  .

( 1 ) 讨论  $f(x)$  在区间  $(0, \pi)$  上的单调性 .

( 2 ) 求  $f(x)$  的最大值和最小值 .

( 3 ) 设  $n \in \mathbf{N}^*$  , 证明 :  $\sin^2 x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^n x \leq \frac{3^n}{4^n}$  .

**【答案】** ( 1 ) 当  $x \in (0, \frac{\pi}{3})$  时 ,  $f(x)$  单调递增 ;

当  $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$  时 ,  $f(x)$  单调递减 ;

当  $x \in (\frac{2\pi}{3}, \pi)$  时 ,  $f(x)$  单调递增 .

( 2 ) 最大值  $\frac{3\sqrt{3}}{8}$  , 最小值  $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$  .

( 3 ) 证明见解析 .

**【解析】** ( 1 )  $f(x) = \sin^2 x \cdot \sin 2x = 2\sin^3 x \cdot \cos x$  ,

则  $f'(x) = 2(3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x) = 2\sin^2 x(3\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 2\sin^2 x(4\cos^2 x - 1) = 2\sin^2 x(2\cos x + 1)(2\cos x - 1)$  ,

$f'(x) = 0$  在  $x \in (0, \pi)$  上的根为 :  $x_1 = \frac{\pi}{3}$  ,  $x_2 = \frac{2\pi}{3}$  .

当  $x \in (0, \frac{\pi}{3})$  时 ,  $f'(x) > 0$  ,  $f(x)$  单调递增 ;

当  $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$  时 ,  $f'(x) < 0$  ,  $f(x)$  单调递减 ;

当  $x \in (\frac{2\pi}{3}, \pi)$  时 ,  $f'(x) > 0$  ,  $f(x)$  单调递增 .

( 2 ) 注意到  $f(x + \pi) = \sin^2(x + \pi) \sin[2(x + \pi)]$

$= \sin^2 x \sin 2x = f(x)$  ,

故函数  $f(x)$  是周期为  $\pi$  的函数 .

结合 ( 1 ) 的结论 , 计算可得 :  $f(0) = f(\pi) = 0$  ,

$f(\frac{\pi}{3}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$  ,  $f(\frac{2\pi}{3}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$  ,

据此可得 :  $[f(x)]_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$  ,  $[f(x)]_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$  .

( 3 ) 由 ( 2 ) 的结论得 :  $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$  ,

$\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^n x$

$= [\sin^3 x \sin^3 2x \sin^3 4x \cdots \sin^3 2^n x]^{\frac{2}{3}}$

$= [\sin x (\sin^2 x \sin 2x) (\sin^2 2x \sin 4x) \cdots (\sin^2 2^{n-1} x \sin 2^n x) \sin^2 2^n x]^{\frac{2}{3}}$

$$\leq \left[ \sin x \times \frac{3\sqrt{3}}{8} \times \frac{3\sqrt{3}}{8} \times \cdots \times \frac{3\sqrt{3}}{8} \times \sin^2 2^n x \right]^{\frac{2}{3}}$$

$$\leq \left[ \left( \frac{3\sqrt{3}}{8} \right)^n \right]^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{3}{4} \right)^n.$$

**【标注】**【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间；放缩法；利用单调性求函数最值

6. 2021年天津河西区天津市实验中学高三下学期高考模拟（6月）第20题 ★★★

已知函数  $f(x) = \ln(x+1) - \frac{kx}{x+1} + 1$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的极值.

(2) 请回答下列各题：

① 当  $x > 0$  时， $f(x) > 0$  恒成立，求正整数  $k$  的最大值.

② 证明： $(1+1 \times 2)(1+2 \times 3) \cdots [1+n(n+1)] > e^{n(2-\frac{3}{n+1})}$ .

**【答案】** (1) 答案见解析.

(2) ① 3, 证明见解析.

② 证明见解析.

**【解析】** (1) 定义域  $(-1, +\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{x+1-k}{(x+1)^2}$ ,

当  $k \leq 0$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以函数  $f(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上单调递增, 无极值;

当  $k > 0$  时, 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x > k-1$ ,  $f'(x) < 0$  得  $-1 < x < k-1$ ,

所以函数  $f(x)$  在  $(-1, k-1)$  上单调递减, 在  $(k-1, +\infty)$  上单调递增,

此时函数  $f(x)$  的极小值  $f(k-1) = \ln k - k + 2$ , 无极大值,

综上, 当  $k \leq 0$  时, 函数  $f(x)$  无极值;

当  $k > 0$  时, 函数  $f(x)$  的极小值为  $\ln k - k + 2$ , 无极大值.

(2) ① 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$  恒成立、即只需  $f(x)_{\min} > 0$  成立即可.

由 (1) 可知

当  $k > 0$  时, 函数  $f(x)$  在  $(-1, k-1)$  上单调递减, 在  $(k-1, +\infty)$  上单调递增,

(i) 若  $k-1 \leq 0$ , 即  $k \leq 1$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以

$f(x)_{\min} > f(0) = 1$  满足题意.

(ii) 若  $k-1 > 0$ , 即  $k > 1$  时, 函数  $f(x)$  在  $(0, k-1)$  上单调递减, 在

$(k-1, +\infty)$  上单调递增,

所以  $f(x)_{\min} = f(k-1) = \ln k - k + 2 > 0$ ,

令  $g(x) = \ln x - x + 2$ , 则  $g'(x) = \frac{1-x}{x} < 0$ , 解得  $x > 1$ ,

所以  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减,

又知  $g(2) = \ln 2 > 0$ ,  $g(3) = \ln 3 - 1 > 0$ ,  $g(4) = \ln 4 - 2 < 0$ ,

所以  $\exists x_0 \in (3, 4)$  使得  $g(x_0) = 0$ .

则  $g(x) = \ln x - x + 2 > 0$  的解集为  $(1, x_0)$ ,

综上  $k$  的取值范围为  $(-\infty, x_0)$ ,  $x_0 \in (3, 4)$ ,

所以正整数  $k$  的最大值为 3.

② 证明: 两边取对数得  $\ln(1+1 \times 2)(1+2 \times 3) \cdots [1+n(n+1)] > 2n - \frac{3n}{n+1}$ ,

即只需证  $\ln(1+1 \times 2) + \ln(1+2 \times 3) + \cdots + \ln[1+n(n+1)] > 2n - \frac{3n}{n+1}$ ,

由 (1) 知  $\ln(x+1) > \frac{3x}{x+1} - 1 = 2 - \frac{3}{x+1}$ ,

令  $x = n(n+1)$ , 则  $\ln[n(n+1)+1] > 2 - \frac{3}{n(n+1)+1} > 2 - \frac{3}{n(n+1)}$

$= 2 - \left( \frac{3}{n} - \frac{3}{n+1} \right)$ ,

所以  $\ln(1+1 \times 2) + \ln(1+2 \times 3) + \cdots + \ln[1+n(n+1)]$

$> 2n - 3 \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2n - \frac{3n}{n+1}$ ,

所以  $(1+1 \times 2)(1+2 \times 3) \cdots [1+n(n+1)] > e^{n(2-\frac{3}{n+1})}$ .

**【标注】**【知识点】导数的运算

7. 2020年天津河东区高三一模第20题 ★★★

已知函数  $f(x) = (\cos x - x)(\pi + 2x) - \frac{8}{3}(\sin x + 1)$ ,  $g(x) = 3(x - \pi) \cos x - 4(1 + \sin x) \ln \left( 3 - \frac{2x}{\pi} \right)$

证明:

(1) 存在唯一  $x_0 \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ , 使  $f(x_0) = 0$ .

(2) 存在唯一  $x_1 \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right)$ , 使  $g(x_1) = 0$ , 且对 (1) 中的  $x_0$ , 有  $x_0 + x_1 < \pi$ .

**【答案】** (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

**【解析】** (1) 当  $x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$  时,  $f'(x) = -(1 + \sin x)(\pi + 2x) - 2x - \frac{2}{3} \cos x < 0$ .

函数  $f(x)$  在  $\left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$  上为减函数. 又  $f(0) = \pi - \frac{8}{3} > 0$ ,  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi^2 - \frac{16}{3} < 0$ .

所以存在唯一  $x_0 \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ , 使  $f(x_0) = 0$ .

(2) 考虑函数  $h(x) = \frac{3(x - \pi) \cos x}{1 + \sin x} - 4 \ln \left( 3 - \frac{2}{\pi} x \right)$ ,  $x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$ .

令  $t = \pi - x$ . 则  $x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$  时,  $t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ .

即  $u(t) = h(\pi - t) = \frac{3t \cos t}{1 + \sin t} - 4 \ln \left( 1 + \frac{2}{\pi} t \right)$ .

则  $u'(t) = \frac{3f(t)}{(\pi + 2t)(1 + \sin t)}$ .

由 (1) 得, 当  $t \in (0, x_0)$  时,  $u'(t) > 0$ .

当  $t \in \left( x_0, \frac{\pi}{2} \right)$  时,  $u'(t) < 0$ .



在  $(0, x_0)$  上  $u(t)$  是增函数, 又  $u(0) = 0$

从而当  $t \in (0, x_0]$  时,  $u(t) > 0$ , 所以  $u(t)$  在  $(0, x_0]$  上无零点

在  $(x_0, \frac{\pi}{2})$  上  $u(t)$  为减函数, 由  $u(x_0) > 0$ ,  $u(\frac{\pi}{2}) = -\ln 2 < 0$ ,

知存在唯一  $t_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ , 使  $u(t_1) = 0$ .

所以存在唯一的  $t_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 使  $u(t_1) = 0$ .

因此存在唯一的  $x_1 = \pi - t_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 使  $h(x_1) = h(\pi - t_1) = u(t_1) = 0$ .

因为当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时,  $1 + \sin x > 0$  故  $g(x) = (1 + \sin x)h(x)$  与  $h(x)$

的零点相同, 所以存在唯一的  $x_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 使  $g(x_1) = 0$ .

因  $x_1 = \pi - t_1$ ,  $t_1 > x_0$ , 所以  $x_0 + x_1 < \pi$ .

**【标注】**【知识点】隐零点问题

8. 2019~2020学年10月天津和平区高三上学期月考第20题15分 ★★★

已知函数  $f(x) = ax + b \ln x (a, b \in \mathbf{R})$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y = \frac{1}{2}x - 1$ .

(1) 求  $a, b$  的值.

(2) 当  $x > 1$  时,  $f(x) + \frac{k}{x} < 0$  恒成立, 求实数  $k$  的取值范围.

(3) 设  $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x$ , 求证: 对于  $x \in (0, +\infty)$ ,  $g(x) - f(x) > 2$  恒成立.

**【答案】** (1)  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ .

(2)  $(-\infty, \frac{1}{2}]$ .

(3) 证明见解析.

**【解析】** (1)

$f(x)$  的导函数  $f'(x) = a + \frac{b}{x}$ ,

由切线方程知  $\begin{cases} f(1) = a = -\frac{1}{2} \\ f'(1) = a + b = \frac{1}{2} \end{cases}$ ,

$\therefore \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$ .

(2) 由 (1) 知  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln x$ ,

$\therefore f(x) + \frac{k}{x} < 0$  即  $-\frac{1}{2}x + \frac{k}{x} + \ln x < 0$ ,

即  $\frac{k}{x} < \frac{1}{2}x - \ln x$ ,

$\because x > 1$ ,

$\therefore k < \frac{1}{2}x^2 - x \ln x$ ,

令  $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \ln x$  即  $k < h(x)_{\min}$ ,

$\because h(x)$  的导函数为  $h'(x) = x - 1 - \ln x$ , 令  $h'(x) = t(x)$ ,

则  $t'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$ ,

$\therefore h'(x)$  在  $(1, +\infty)$  单调递增,

$\therefore h'(x) > h'(1)$ ,

$\therefore h(x)$  在  $(1, +\infty)$  单调递增,

$\therefore h(x) > h(1) = -\frac{1}{2}$ ,

$\therefore k \leq \frac{1}{2}$ ,

即  $k$  的取值范围是  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ .

(3) 令  $F(x) = g(x) - f(x) = e^x - \ln x$ ,

则  $f(x)$  的导函数  $F'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ ,

则  $F'(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增,

$\therefore F'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$ ,  $f'(1) = e - 10$ ,

$\therefore \exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  s.t.,  $F'(x_0) = 0$ , 即  $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ ,

则在  $(0, x_0)$ ,  $F'(x) < 0$ , 即  $F(x)$  单调递减,

$(x_0, +\infty)$ ,  $F'(x) > 0$ , 即  $F(x)$  单调递增,

| $x$     | $(0, x_0)$ | $x_0$ | $(x_0, +\infty)$ |
|---------|------------|-------|------------------|
| $F'(x)$ | -          | 0     | +                |
| $F(x)$  | ↓          | 极小值   | ↗                |

故  $F(x_0)$  为  $F(x)$  的极小值, 也为  $F(x)$  的最小值,

故  $F(x)_{\min} = F(x_0)$

$= e^{x_0} - \ln x_0$

$= \frac{1}{x_0} + \ln(e^{x_0}) = \frac{1}{x_0} + x_0$ ,

$\therefore x_0 > 0$ ,

$\therefore \frac{1}{x_0} + x_0 > 2\sqrt{x_0 \cdot \frac{1}{x_0}} = 2$ ,

当且仅当  $x_0 = \frac{1}{x_0}$  时取等号,

$\therefore x_0 < 1$ ,

$\therefore \frac{1}{x_0} + x_0 \neq 2$ , 即  $\frac{1}{x_0} + x_0 > 2$ ,

即  $F(x) > 2$  恒成立.

**【标注】【知识点】** 通过构造函数证明不等式; 利用导数解决不等式恒成立问题; 利用导数求函数的最值; 隐零点问题; 函数零点存在定理; 利用基本不等式证明其它不等式

9. 2020年天津河西区天津市第四中学高三下学期高考模拟(4月)第20题16分 ★★★

已知函数  $f(x) = \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$ .

(1) 求函数  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上的最大值;

(2)

若函数  $f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ , 证明  $\frac{x_1}{x_2} < ae$ .

**【答案】** (1) 当  $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$  时,  $f(x)_{\max} = f(2) = \frac{2}{a} - e^2$ ;

当  $\frac{1}{e^2} < a < \frac{1}{e}$  时,  $f(x)_{\max} = f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a}$ ;

当  $a \geq \frac{1}{e}$  时,  $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{a} - e$ .

(2) 证明见解析.

**【解析】** (1) 因为  $f(x) = \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{a} - e^x$ ,

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = \ln \frac{1}{a}$ ,

当  $x < \ln \frac{1}{a}$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x > \ln \frac{1}{a}$  时,  $f'(x) < 0$ ,

故函数  $f(x)$  的增区间为  $\left(-\infty, \ln \frac{1}{a}\right)$ ; 减区间为  $\left(\ln \frac{1}{a}, +\infty\right)$ .

当  $\ln \frac{1}{a} \geq 2$ , 即  $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$  时,  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上单调递增, 则

$$f(x)_{\max} = f(2) = \frac{2}{a} - e^2;$$

当  $1 < \ln \frac{1}{a} < 2$  时, 即  $\frac{1}{e^2} < a < \frac{1}{e}$  时,  $f(x)$  在区间  $\left[1, \ln \frac{1}{a}\right)$  上单调递增, 在区间

$\left(\ln \frac{1}{a}, 2\right]$  上单调递减, 则  $f(x)_{\max} = f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a}$ ;

当  $\ln \frac{1}{a} \leq 1$ , 即  $a \geq \frac{1}{e}$  时,  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上单调递减, 则

$$f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{a} - e.$$

(2) 若函数  $f(x)$  有两个零点, 由  $f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a} > 0$ , 可得  $\ln \frac{1}{a} > 1$ ,

则  $\frac{1}{a} > e$ , 此时  $f(1) = \frac{1}{a} - e > 0$ , 由此可得  $x_1 < 1 < \ln \frac{1}{a} < x_2$ ,

故  $x_2 - x_1 > \ln \frac{1}{a} - 1$ , 即  $x_1 - x_2 < 1 - \ln \frac{1}{a}$ ,

又因为  $f(x_1) = \frac{x_1}{a} - e^{x_1} = 0$ ,  $f(x_2) = \frac{x_2}{a} - e^{x_2} = 0$ ,

所以  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2} < e^{1 - \ln \frac{1}{a}} = e^{\ln ae} = ae$ ,

所以  $\frac{x_1}{x_2} < ae$ .

**【标注】**【知识点】函数零点存在定理; 利用导数求函数的最值; 双变量问题