

04导数解答3

1. 不等式证明

- 已知函数 $f(x) = x^2 + ax - \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.
 - 任意个数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数, 求实数 a 的取值范围.
 - 令 $g(x) = f(x) - x^2$, 是否存在实数 a , 当 $x \in (0, e]$ (e 是自然常数) 时, 函数 $g(x)$ 的最小值是 3, 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由.
 - 当 $x \in (0, e]$ 时, 证明: $e^2 x^2 - \frac{5}{2}x > (x+1)\ln x$.
- 已知函数 $f(x) = (x+b)(e^x - a)$, ($b > 0$) 在 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $(e-1)x + ey + e - 1 = 0$.
 - 求 a, b .
 - 若方程 $f(x) = m$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_2 - x_1 \leq 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}$.
- 已知函数 $f(x) = \frac{1 + \ln(1+x)}{x} (x > 0)$.
 - 判断函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性.
 - 若 $f(x) > \frac{k}{x+1}$ 恒成立, 求整数 k 的最大值.
 - 求证: $(1+1 \times 2)(1+2 \times 3) \cdots [1+n(n+1)] > e^{2n-3}$.
- 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} + k$ 的极大值为 $\frac{1+e}{e}$, 其中 $e = 2.71828 \cdots$ 为自然对数的底数.
 - 求实数 k 的值.
 - 若函数 $g(x) = e^x - \frac{a}{x}$, 对任意 $x \in (0, +\infty)$, $g(x) \geq af(x)$ 恒成立.
 - 求实数 a 的取值范围;
 - 证明: $x^2 f(x) > a \sin x + x^2 - 1$.
- 已知函数 $f(x) = \sin^2 x \cdot \sin 2x$.
 - 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的单调性.
 - 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.
 - 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\sin^2 x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^n x \leq \frac{3^n}{4^n}$.
- 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{kx}{x+1} + 1$.
 - 求函数 $f(x)$ 的极值.
 - 请回答下列各题:
 - 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 求正整数 k 的最大值.
 - 证明: $(1+1 \times 2)(1+2 \times 3) \cdots [1+n(n+1)] > e^{n(2-\frac{3}{n+1})}$.

7.

已知函数 $f(x) = (\cos x - x)(\pi + 2x) - \frac{8}{3}(\sin x + 1)$, $g(x) = 3(x - \pi) \cos x - 4(1 + \sin x) \ln\left(3 - \frac{2x}{\pi}\right)$

.

证明：

(1) 存在唯一 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使 $f(x_0) = 0$.

(2) 存在唯一 $x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 使 $g(x_1) = 0$, 且对 (1) 中的 x_0 , 有 $x_0 + x_1 < \pi$.

8. 已知函数 $f(x) = ax + b \ln x (a, b \in \mathbf{R})$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{2}x - 1$.

(1) 求 a , b 的值 .

(2) 当 $x > 1$ 时 , $f(x) + \frac{k}{x} < 0$ 恒成立 , 求实数 k 的取值范围 .

(3) 设 $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x$, 求证：对于 $x \in (0, +\infty)$, $g(x) - f(x) > 2$ 恒成立 .

9. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值 ;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1 , $x_2 (x_1 < x_2)$, 证明 $\frac{x_1}{x_2} < ae$.