

03导数解答2练习题

1. 2014年高考真题天津卷文科第19题 ★★★★★

已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3 (a > 0)$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2) 若对于任意的 $x_1 \in (2, +\infty)$, 都存在 $x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$

当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 的极小值为 0; 当 $x = \frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $\frac{1}{3a^2}$

(2) a 的取值范围为 $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$.

【解析】 (1) $f'(x) = 2x - 2ax^2$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = 0$ 或 $x = \frac{1}{a}$,

$\because a > 0$,

$\therefore f(x)$, $f'(x)$ 随 x 变化情况如下表

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	单减	极小值0	单增	极大值 $\frac{1}{3a^2}$	单减

由表得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$

当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 的极小值为 0;

当 $x = \frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $\frac{1}{3a^2}$.

(2) $y = \frac{1}{f(x_1)} (x_1 > 2)$ 的值域为 $y = f(x_2) (x_2 > 1)$ 的子集,

$\therefore f(x_1) \neq 0$ 即 $1 \neq \frac{2}{3}ax_1$,

又 $\because x_1 \in (2, +\infty)$,

$\therefore a \geq \frac{3}{4}$,

$\therefore y = \frac{1}{f_1(x_1)}$ 的值域为 $(-\infty, 0)$,

$\therefore f(1) \geq 0$ 即 $1 - \frac{2a}{3} \geq 0$,

$\therefore a \leq \frac{3}{2}$.

综上所述: a 的取值范围为 $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式能成立问题

2. 2015年天津南开区高三一模文科第20题14分 ★★★★★

设函数 $f(x) = (x-1)^2 + a \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x + 2y - 1 = 0$ 垂直, 求 a 的值.

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(3) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $f(x_2) > \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

【答案】 (1) $a = 2$.

(2) 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}, +\infty\right)$ 单调递增;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}\right), \left(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}, +\infty\right)$ 单调递增,

在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 单调递减.

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 2x - 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x},$$

$\because$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x + 2y - 1 = 0$ 垂直,

$$\therefore f'(1) = a = 2.$$

(2) 令 $g(x) = 2x^2 - 2x + a$, 则 $\Delta = 4 - 8a$.

① 当 $\Delta \leq 0$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $g(x) \geq 0$, 从而 $f(x) \geq 0$,

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $\Delta > 0$, 即 $a < \frac{1}{2}$ 时, $g(x) = 0$ 的两个根为 $x_1 = \frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}$,

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{1-2a}}{2} > \frac{1}{2},$$

当 $\sqrt{1-2a} \geq 1$, 即 $a \leq 0$ 时, $x_1 \leq 0$, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $x_1 > 0$.

故当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}, +\infty\right)$ 单调递增;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}\right), \left(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}, +\infty\right)$ 单调递增,

在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 单调递减.

(3) 当函数 $f(x)$ 有 2 个极值点时, $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < \sqrt{1-2a} < 1$,

$$\text{此时 } x_2 = \frac{1+\sqrt{1-2a}}{2} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ 且 } g(x_2) = 0,$$

$$\text{即 } a = -2x_2^2 + 2x_2,$$

$$\therefore f(x_2) = (x_2 - 1)^2 + a \ln x_2 = (x_2 - 1)^2 + (-2x_2^2 + 2x_2) \ln x_2,$$

$$\text{设 } h(x) = (x - 1)^2 + (-2x^2 + 2x) \ln x, \text{ 其中 } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\text{则 } h'(x) = (-4x + 2) \ln x,$$

由于 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $h'(x) > 0$, 故函数 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 单调递增,
 故 $h(x) > h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$,
 $\therefore f(x_2) > \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

【标注】【知识点】导数与极值；利用导数求函数的单调性、单调区间；通过构造函数证明不等式

3. 2019年天津南开区南开大学附属中学高三二模理科第20题14分 ★★★★★

已知函数 $f(x) = x \log_a x (a > 0)$, $g(x) = (m+1)x - \ln x - f(x)$, 函数 $f(x)$ 在点 $x = e^{-1}$ 处取得极小值 $-e^{-1}$ (e 为自然对数的底数).

(1) 若 $g'(x)$ 恰有一个零点, 求 m 的取值集合.

(2) 若 $g'(x)$ 有两零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求证: $2 < x_1 + x_2 < 3e^{m-1} - 1$.

【答案】 (1) $\{1\}$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 由 $f'(x) = \log_a x + \frac{1}{\ln a} = 0$, 解得 $x = e^{-1}$,

当 $x \in (0, e^{-1})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (e^{-1}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 $x = e^{-1}$ 处取得极小值,

$\therefore f(e^{-1}) = e^{-1} \log_a e^{-1} = -e^{-1}$, 解得 $a = e$,

$\therefore f(x) = x \ln x$.

$\therefore g(x) = (m+1)x - \ln x - x \ln x$, 从而 $g'(x) = m - \frac{1}{x} - \ln x$,

设 $h(x) = g'(x) = m - \frac{1}{x} - \ln x$,

$\therefore h'(x) = \frac{1-x}{x^2}$,

令 $h'(x) = 0$, 得 $x = 1$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

$\therefore$ 故 $[h(x)]_{\max} = h(1) = m - 1$.

① 当 $[h(x)]_{\max} = 0$, 即 $m = 1$ 时, 因最大值点唯一, 故符合题设;

② 当 $[h(x)]_{\max} < 0$, 即 $m < 1$ 时, $h(x) < 0$ 恒成立, 不合题设;

③ 当 $[h(x)]_{\max} > 0$, 即 $m > 1$ 时, 一方面, $\exists e^m > 1$, $h(e^m) = -e^{-m} < 0$;

另一方面, $\exists e^{-m} < 1$, $h(e^{-m}) = 2m - e^m \leq 2m - em < 0$,

于是, $h(x)$ 有两零点, 不合题设.

综上, m 的取值集合为 $\{1\}$.

(2) 先证 $x_1 + x_2 > 2$,

依题意有 $m = \frac{1}{x_1} + \ln x_1 = \frac{1}{x_2} + \ln x_2$,

故 $\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = \ln \frac{x_2}{x_1}$,

设 $\frac{x_2}{x_1} = t$, 则 $t > 1$, 且 $\begin{cases} x_2 = tx_1, \\ \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = \ln t, \end{cases}$ 解得 $x_1 = \frac{t-1}{t \ln t}$,

所以, $x_1 + x_2 = x_1 + tx_1 = \frac{t^2 - 1}{t \ln t}$, $x_2 + x_2 - 2 = \frac{t - \frac{1}{t} - 2 \ln t}{\ln t}$,

设 $\varphi(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$, $x > 1$,

$\therefore \varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2} > 0$,

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore x > 1$ 时, $\varphi(x) > \varphi(1) = 0$, 即 $t - \frac{1}{t} - 2 \ln t > 0$,

又 $\ln t > 0$, $\therefore x_1 + x_2 > 2$,

再证 $x_1 + x_2 < 3e^{m-1} - 1$,

$\therefore g'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta(x) = mx - 1 - x \ln x = 0$,

$\therefore x_1, x_2$ 也是 $\eta(x)$ 的两个零点,

由 $\eta'(x) = m - 1 - \ln x$, 得 $x = e^{m-1}$,

易知, e^{m-1} 是 $\psi(x)$ 的唯一最大值点, 故有 $\begin{cases} h(e^{m-1}) > 0, \\ x_1 < e^{m-1} < x_2. \end{cases}$

作函数 $\psi(x) = \ln x - \frac{2(x - e^{m-1})}{x + e^{m-1}} - (m-1)$,

则 $\psi(x) = \frac{(x - e^{m-1})^2}{x(x + e^{m-1})^2} \geq 0$, 故 $\psi(x)$ 单调递增,

故当 $x > e^{m-1}$ 时, $\psi(x) > \psi(e^{m-1}) = 0$;

当 $0 < x < e^{m-1}$ 时, $\psi(x) < 0$,

于是 $mx_1 - 1 = x_1 \ln x_1 < \frac{2x_1(x_1 - e^{m-1})}{x_1 + e^{m-1}} + x_1(m-1)$,

整理, $x_1^2 - (3e^{m-1} - 1)x_1 + e^{m-1} > 0$,

同理, $x_2^2 - (3e^{m-1} - 1)x_2 + e^{m-1} < 0$,

$\therefore x_2^2 - (3e^{m-1} - 1)x_2 + e^{m-1} < x_1^2 - (3e^{m-1} - 1)x_1 + e^{m-1}$,

$\therefore (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) < (3e^{m-1} - 1)(x_2 - x_1)$,

于是, $x_1 + x_2 < 3e^{m-1} - 1$.

综上 $2 < x_1 + x_2 < 3e^{m-1} - 1$.

【标注】【知识点】求参数范围(含参指对型导函数);二阶导问题;双变量问题