

03导数解答2练习题

1. 已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3 (a > 0)$, $x \in \mathbf{R}$.
 - (1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.
 - (2) 若对于任意的 $x_1 \in (2, +\infty)$, 都存在 $x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$, 求 a 的取值范围.
2. 设函数 $f(x) = (x-1)^2 + a \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.
 - (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x + 2y - 1 = 0$ 垂直, 求 a 的值.
 - (2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
 - (3) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $f(x_2) > \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.
3. 已知函数 $f(x) = x \log_a x (a > 0)$, $g(x) = (m+1)x - \ln x - f(x)$, 函数 $f(x)$ 在点 $x = e^{-1}$ 处取得极小值 $-e^{-1}$ (e 为自然对数的底数).
 - (1) 若 $g'(x)$ 恰有一个零点, 求 m 的取值集合.
 - (2) 若 $g'(x)$ 有两零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求证: $2 < x_1 + x_2 < 3e^{m-1} - 1$.