

## 03导数解答2

### 1. 零点问题

1. 已知函数  $f(x) = a \ln x - x^2 + (2a - 1)x$  , 其中  $a \in \mathbf{R}$  .
  - (1) 当  $a = 1$  时 , 求函数  $f(x)$  的单调区间 .
  - (2) 求函数  $f(x)$  的极值 .
  - (3) 若函数  $f(x)$  有两个不同的零点 , 求  $a$  的取值范围 .
2. 若函数  $f(x) = ax^3 - bx + 4$  , 当  $x = 2$  时 , 函数  $f(x)$  有极值  $-\frac{4}{3}$  .
  - (1) 求函数的解析式 .
  - (2) 求函数的极值 .
  - (3) 若关于  $x$  的方程  $f(x) = k$  有三个零点 , 求实数  $k$  的取值范围 .
3. 已知函数  $f(x) = \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$  .
  - (1) 求函数  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上的最大值 ;
  - (2) 若函数  $f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  , 证明  $\frac{x_1}{x_2} < ae$  .
4. 设函数  $f(x) = x^2 - (a - 2)x - a \ln x$  .
  - (1) 求函数  $f(x)$  的单调区间 .
  - (2) 若函数有两个零点 , 求满足条件的最小正整数  $a$  的值 .
  - (3) 若方程  $f(x) = c$  有两个不相等的实数根  $x_1, x_2$  , 求证 :  $f' \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) > 0$  .

### 2. 隐零点问题

5. 设  $k \in \mathbf{R}$  , 函数  $f(x) = \ln x - kx$  .
  - (1) 若  $k = 2$  , 求曲线  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处的切线方程 .
  - (2)  $f(x)$  无零点 , 求实数  $k$  的取值范围 .
  - (3) 若  $f(x)$  有两个相异零点  $x_1, x_2$  , 求证 :  $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$  .
6. 已知函数  $f(x) = (x + b)(e^x - a)$  ,  $(b > 0)$  在  $(-1, f(-1))$  处的切线方程为  $(e - 1)x + ey + e - 1 = 0$  .
  - (1) 求  $a, b$  .
  - (2) 若方程  $f(x) = m$  有两个实数根  $x_1, x_2$  , 且  $x_1 < x_2$  , 证明 :  $x_2 - x_1 \leq 1 + \frac{m(1 - 2e)}{1 - e}$  .
7. 设函数  $f(x) = \ln x - a(x - 1)e^x$  , 其中  $a \in \mathbf{R}$  .
  - (1) 若  $a \leq 0$  , 讨论  $f(x)$  单调性 .
  - (2) 若  $0 < a < \frac{1}{e}$  .
    - ① 证明 :  $f(x)$  恰有两个零点 .

② 设  $x_0$  为  $f(x)$  的极值点,  $x_1$  为  $f(x)$  的零点, 且  $x_1 > x_0$ , 证明:  $3x_0 - x_1 > 2$ .

8. 设函数  $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x (a \in \mathbf{R})$ .

(1) 当  $a = 2$  时, 求  $f(x)$  的单调区间.

(2) 若  $f(x)$  有两个极值点  $x_1$  和  $x_2$ , 记过点  $A(x_1, f(x_1))$ ,  $B(x_2, f(x_2))$  的直线的斜率为  $k$ , 问: 是否存在  $a$ , 使得  $k = 2 - a$ ? 若存在, 求出  $a$  的值, 若不存在, 请说明理由.

(3) 证明:  $\sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$ .