

02导数解答1练习题

1. 2018~2019学年广东广州天河区广州市第八十九中学高二下学期期中理科第21题12分 ★★★

已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 - b^2x$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $y - 3 = 0$ 平行, 求 a 与 b 满足的关系.

(2) 当 $b = 0$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(3) 当 $a = 0, b = 1$ 时, 对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 总有 $f(x) < x(e^x + k)$ 成立, 求实数 k 的取值范围.

【答案】 (1) $3 + 2a - b^2 = 0$.

(2) 当 $a = 0$ 时, 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{2}{3}a)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\frac{2}{3}a, 0)$ 上单调递减, $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(-\frac{2}{3}a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, -\frac{2}{3}a)$ 上单调递减.

(3) $[-2, +\infty)$.

【解析】 (1) 由题意, 得 $f'(x) = 3x^2 + 2ax - b^2$,

由函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 $y - 3 = 0$ 平行, 得 $f'(1) = 0$,

即 $3 + 2a - b^2 = 0$.

(2) 当 $b = 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 + 2ax$,

由 $f'(x) = 0$ 知 $\Delta = 4a^2 \geq 0$,

① 当 $a = 0$ 时, $\Delta = 0$, $f'(x) \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 恒成立,

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

② 当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 0$ 或 $x < -\frac{2}{3}a$,

由 $f'(x) < 0$, 解得 $-\frac{2}{3}a < x < 0$,

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{2}{3}a)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\frac{2}{3}a, 0)$ 上单调递减,

当 $a < 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 解得 $x > -\frac{2}{3}a$ 或 $x < 0$,

由 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < -\frac{2}{3}a$,

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(-\frac{2}{3}a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, -\frac{2}{3}a)$ 上单调递减.

(3) 当 $a = 0, b = 1$ 时, $f(x) = x^3 - x$,

由 $f(x) < x(e^x + k)$, 得 $x^3 - x < x(e^x + k)$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

$\because x > 0$,

$\therefore x^2 - 1 < e^x + k$,

$\therefore k > x^2 - 1 - e^x$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

设 $g(x) = x^2 - 1 - e^x$, 则 $g'(x) = 2x - e^x$,

令 $h(x) = 2x - e^x$, 则 $h'(x) = 2 - e^x$,

由 $h'(x) = 0$, 解得 $x = \ln 2$,

由 $h'(x) > 0$, 解得 $0 < x < \ln 2$, 由 $h'(x) < 0$, 解得 $x > \ln 2$,

$\therefore$ 导函数 $g'(x)$ 在区间 $(0, \ln 2)$ 单增 , 在区间 $(\ln 2, +\infty)$ 单减 ,

$\therefore g'(x) \leq g'(\ln 2) = 2\ln 2 - 2 < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 ,

$\therefore g(x) < g(0) = -2$,

$\therefore k \geq -2$,

故所求实数 k 的取值范围 $[-2, +\infty)$.

【标注】【知识点】导数的几何意义；求在某点处的切线方程；利用导数证明不等式恒成立问题；
导数与最值；利用导数求函数的单调性、单调区间

2. 2020~2021学年10月天津和平区天津市第二十一中学高三上学期月考第16题14分 ★★★

已知函数 $f(x) = \frac{a \cdot e^x}{x}$ ($a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$) .

(1) 当 $a = 1$ 时 , 求曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的方程 .

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

(3) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时 , 若 $f(x) \geq 1$ 恒成立 , 求 a 的取值范围 .

【答案】 (1) 见解析

(2) 见解析

(3) 见解析

【解析】 (1) 解：由 $f(x) = \frac{a \cdot e^x}{x}$, 得：

$$f'(x) = \frac{ax \cdot e^x - ae^x}{x^2} = \frac{ae^x(x-1)}{x^2}, \quad x \neq 0,$$

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

依题意 $f'(1) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处切线的斜率为 0 ,

把点 $(1, f(1))$ 代入 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 中 , 得 $f(1) = e$,

则曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的方程为 $y = e$.

(2) 解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$.

$$\text{由 } f'(x) = \frac{ax \cdot e^x - ae^x}{x^2} = \frac{ae^x(x-1)}{x^2} \text{ 可得：}$$

①若 $a > 0$,

当 $x > 1$ 时 , $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 为增函数 ;

当 $x < 0$ 或 $0 < x < 1$ 时 , $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 为减函数 .

②若 $a < 0$,

当 $x < 0$ 或 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 为增函数;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 为减函数.

综上所述, 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(1, +\infty)$, 单调减区间为 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$;

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, 单调减区间为 $(1, +\infty)$.

(3) 解: 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 要使 $f(x) = \frac{a \cdot e^x}{x} \geq 1$ 恒成立,

即 $a \geq \frac{x}{e^x}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时恒成立.

设 $g(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$,

可知当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 为增函数;

当 $x > 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 为减函数,

则 $g(x)_{\max} = g(1) = \frac{1}{e}$,

从而 $a \geq \frac{1}{e}$, 所以 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

【标注】【知识点】导数的定义; 求在某点处的切线方程; 利用公式和四则运算法则求导; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 不等式中的恒成立与能成立问题

3. 2020~2021学年10月天津和平区天津市第二十中学高三上学期月考第20题16分 ★★★

已知函数 $f(x) = x^2 + 2x + a \ln x$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 为单调函数, 求实数 a 的取值范围.

(2) 当 $m \geq 1$ 时, 不等式 $f(2m-1) \geq 2f(m) - 3$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$.

(2) $(-\infty, 2]$.

【解析】 (1) 根据已知可得 $f'(x) = 2x + 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 + 2x + a}{x}$,

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 为单调函数,

所以 $f'(x) \geq 0$ 或 $f'(x) \leq 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立,

即函数 $g(x) = 2x^2 + 2x + a \geq 0$ 或 $g(x) = 2x^2 + 2x + a \leq 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立.

当 $g(x) = 2x^2 + 2x + a \geq 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立时,

因为函数的对称轴方程为 $x = -\frac{1}{2}$, 开口向上, 所以 $g(0) \geq 0$, 所以 $a \geq 0$.

当 $g(x) = 2x^2 + 2x + a \leq 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立时,

因为函数的对称轴方程为 $x = -\frac{1}{2}$, 开口向上, 所以 $g(1) \leq 0$, 所以 $a \leq -4$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$.

(2) 原不等式等价于 $(2m-1)^2 + 2(2m-1) + a \ln(2m-1) \geq 2(m^2 + 2m + a \ln m) - 3$

化简得, $2m^2 - 4m + 2 \geq a \ln m^2 - a \ln(2m - 1)$, 即

$$2m^2 - a \ln m^2 \geq 2(2m - 1) - a \ln(2m - 1),$$

令 $h(m) = 2m - a \ln m$, 则原不等式转化为 $h(m^2) \geq h(2m - 1)$,

因为 $m \geq 1$, 所以 $m^2 \geq 2m - 1$, 若 $h(m^2) \geq h(2m - 1)$ 成立,

则只需要函数 $h(m) = 2m - a \ln m (m \geq 1)$ 是增函数即可,

即 $h'(m) = 2 - \frac{a}{m} \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a \leq 2m$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题; 通过构造函数证明不等式; 已知单调性求参数的取值范围

4. 2020~2021学年10月天津南开区天津市南开中学高三上学期月考第17题15分 ★★★★★

已知函数 $f(x) = a - \frac{2}{2^x - 1} (a \in \mathbf{R})$ 为奇函数.

(1) 求 a 的值.

(2) 解不等式 $f(\log_2 x) \geq 3$.

(3) 若不等式 $f(x) - m > 0$ 对任意 $x \in [1, 2]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $a = -1$.

(2) $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

(3) $m < -3$.

【解析】 (1) $f(x) = a - \frac{2}{2^x - 1}$ 为奇函数,

即 $f(-x) = -f(x)$,

$$a - \frac{2}{2^{-x} - 1} = -a + \frac{2}{2^x - 1},$$

$$2a = \frac{2}{2^x - 1} + \frac{2 \cdot 2^x}{1 - 2^x} = -2,$$

即 $a = -1$.

(2) $f(t) = -1 - \frac{2}{2^t - 1} \geq 3$,

$$-\frac{2}{2^t - 1} \geq 4,$$

$$\frac{4 \cdot 2^t - 4 + 2}{2^t - 1} = \frac{4 \cdot 2^t - 2}{2^t - 1} \leq 0,$$

此时 $t = \log_2 x$,

$$\text{即 } \frac{4x - 2}{x - 1} \leq 0,$$

故 $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

(3) $f(x) = -1 - \frac{2}{2^x - 1}$,

定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 2^x \ln 2}{(2^x - 1)^2},$$

$f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上为单增函数 ,
 $f(x) \geq f(1) = -1 - 2 = -3$,
 故 $m < -3$.

【标注】【知识点】分式不等式；利用函数单调性解不等式；利用函数奇偶性求函数解析式

5. ★★★★★

已知函数 $f(x) = ax + \ln x$, $x \in (1, e)$, 且 $f(x)$ 有极值 .

(1) 求实数 a 的取值范围 ;

(2) 求函数 $f(x)$ 的值域 ;

(3) 函数 $g(x) = x^3 - x - 2$, 证明 : $\forall x_1 \in (1, e)$, $\exists x_0 \in (1, e)$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立 .

【答案】 (1) $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$.

(2) 当 $-1 < a \leq \frac{1}{1-e}$ 时 , 函数 $f(x)$ 的值域为 $(ae + 1, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$
 当 $\frac{1}{1-e} < a < -\frac{1}{e}$ 时 , 函数 $f(x)$ 的值域为 $(a, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$.

(3) 证明见解析 .

【解析】 (1) 由 $f(x) = ax + \ln x$ 求导可得 $f'(x) = a + \frac{1}{x}$,

令 $f'(x) = a + \frac{1}{x} = 0$, 可得 $a = -\frac{1}{x}$.

$\because x \in (1, e)$, $\therefore -\frac{1}{x} \in \left(-1, -\frac{1}{e}\right)$, $\therefore a \in \left(-1, -\frac{1}{e}\right)$

又因为 $x \in (1, e)$

x	$\left(1, -\frac{1}{a}\right)$	$-\frac{1}{a}$	$\left(-\frac{1}{a}, e\right)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 , $f(x)$ 有极值 , 实数 a 的取值范围为 $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$.

(2) 由 (1) 可知 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(-\frac{1}{a}\right) = -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right)$.

又 $\because f(1) = a$, $f(e) = ae + 1$,

由 $a \geq ae + 1$, 解得 $a \leq \frac{1}{1-e}$, 又 $\because -1 < \frac{1}{1-e} < -\frac{1}{e}$

$\therefore$ 当 $-1 < a \leq \frac{1}{1-e}$ 时 , 函数 $f(x)$ 的值域为 $(ae + 1, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$

当 $\frac{1}{1-e} < a < -\frac{1}{e}$ 时 , 函数 $f(x)$ 的值域为 $(a, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$.

(3) 由 $g(x) = x^3 - x - 2$ 求导可得 $g'(x) = 3x^2 - 1$.

令 $g'(x) = 3x^2 - 1 = 0$, 解得 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

令 $g'(x) = 3x^2 - 1 > 0$, 解得 $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $\because x \in (1, e) \subseteq (\frac{\sqrt{3}}{3} + \infty)$, $\therefore g(x)$ 在 $(1, e)$ 上为单调递增函数.

$$\therefore g(1) = -2, \quad g(e) = e^3 - e - 2,$$

$\therefore g(x)$ 在 $x \in (1, e)$ 的值域为 $(-2, e^3 - e - 2)$.

$$\therefore e^3 - e - 2 > -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right), \quad ae + 1 > -2a > -2,$$

$$\therefore (ae + 1, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right)) \subseteq (-2, e^3 - e - 2), \quad (a, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right)) \subseteq (-2, e^3 - e - 2).$$

$\therefore \forall x_1 \in (1, e), \exists x_0 \in (1, e)$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立.

【标注】【知识点】导数与单调性