

02导数解答1

1. 恒能成立问题

1. 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x$.

(1) 求 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .

(2) 若存在 $x_0 \in \left[-1, \ln \frac{4}{3}\right]$, 满足 $a - e^x + 1 + x < 0$ 成立 , 求 a 的取值范围 .

【答案】 (1) $y = (e - 1)x - 1$.

(2) $a < \frac{1}{e}$.

【解析】 (1) $f'(x) = e^x - 1$, $f(1) = e - 2$,

$\therefore f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 : $y - e + 2 = (e - 1)(x - 1)$,

即 $y = (e - 1)x - 1$.

(2) $a < e^x - 1 - x$, 即 $a < f(x)$,

令 $f'(x) = e^x - 1 = 0$, 得 $x = 0$.

$\therefore x > 0$ 时 , $f'(x) > 0$, $x < 0$ 时 , $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上减 , 在 $(0, +\infty)$ 上增 ,

又 $x_0 \in \left[-1, \ln \frac{4}{3}\right]$ 时 ,

$\therefore f(x)$ 的最大值在区间端点处取到 ,

$f(-1) = e^{-1} - 1 + 1 = \frac{1}{e}$, $f\left(\ln \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 - \ln \frac{4}{3}$,

$f(-1) - f\left(\ln \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{e} - \frac{4}{3} + 1 + \ln \frac{4}{3}$

$= \frac{1}{e} - \frac{1}{3} + \ln \frac{4}{3} > 0$,

$\therefore f(-1) > f\left(\ln \frac{4}{3}\right)$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left[-1, \ln \frac{4}{3}\right]$ 上最大值为 $\frac{1}{e}$,

故 a 的取值范围是 : $a < \frac{1}{e}$.

【标注】 【知识点】导数的几何意义 ; 求在某点处的切线方程 ; 利用导数解决不等式能成立问题

2. 已知函数 $f(x) = ax + b \ln x (a, b \in \mathbf{R})$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{2}x - 1$.

(1) 求 a, b 的值 .

(2) 当 $x > 1$ 时 , $f(x) + \frac{k}{x} < 0$ 恒成立 , 求实数 k 的取值范围 .

(3) 设 $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x$, 求证: 对于 $x \in (0, +\infty)$, $g(x) - f(x) > 2$ 恒成立.

【答案】(1) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$.

(2) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

(3) 证明见解析.

【解析】(1)

$f(x)$ 的导函数 $f'(x) = a + \frac{b}{x}$,

$$\text{由切线方程知} \begin{cases} f(1) = a = -\frac{1}{2} \\ f'(1) = a + b = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}.$$

(2) 由(1)知 $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln x$,

$$\therefore f(x) + \frac{k}{x} < 0 \text{ 即 } -\frac{1}{2}x + \frac{k}{x} + \ln x < 0,$$

$$\text{即 } \frac{k}{x} < \frac{1}{2}x - \ln x,$$

$$\because x > 1,$$

$$\therefore k < \frac{1}{2}x^2 - x \ln x,$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \ln x \text{ 即 } k < h(x)_{\min},$$

$$\because h(x) \text{ 的导函数为 } h'(x) = x - 1 - \ln x, \text{ 令 } h'(x) = t(x),$$

$$\text{则 } t'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0,$$

$$\therefore h'(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 单调递增},$$

$$\therefore h'(x) > h'(1),$$

$$\therefore h(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 单调递增},$$

$$\therefore h(x) > h(1) = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } k \text{ 的取值范围是 } \left(-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

(3) 令 $F(x) = g(x) - f(x) = e^x - \ln x$,

$$\text{则 } f(x) \text{ 的导函数 } F'(x) = e^x - \frac{1}{x},$$

$$\text{则 } F'(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 单调递增},$$

$$\because F'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0, f'(1) = e - 10,$$

$$\therefore \exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ s.t. }, F'(x_0) = 0, \text{ 即 } e^{x_0} = \frac{1}{x_0},$$

则在 $(0, x_0)$, $F'(x_0) < 0$, 即 $F(x)$ 单调递减,

$(x_0, +\infty)$, $F'(x_0) > 0$, 即 $F(x)$ 单调递增,

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$F'(x)$	—	0	+
$F(x)$	↓	极小值	↗

故 $F(x_0)$ 为 $F(x)$ 的极小值, 也为 $F(x)$ 的最小值,

故 $F(x)_{\min} = F(x_0)$

$$= e^{x_0} - \ln x_0$$

$$= \frac{1}{x_0} + \ln(e^{x_0}) = \frac{1}{x_0} + x_0,$$

$$\because x_0 > 0,$$

$$\therefore \frac{1}{x_0} + x_0 > 2\sqrt{x_0 \cdot \frac{1}{x_0}} = 2,$$

当且仅当 $x_0 = \frac{1}{x_0}$ 时取等号,

$$\because x_0 < 1,$$

$$\therefore \frac{1}{x_0} + x_0 \neq 2, \text{ 即 } \frac{1}{x_0} + x_0 > 2,$$

即 $F(x) > 2$ 恒成立.

【标注】 【知识点】通过构造函数证明不等式; 利用导数解决不等式恒成立问题; 利用导数求函数的最值; 隐零点问题; 函数零点存在定理; 利用基本不等式证明其它不等式

3. 已知函数 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2ax^2 - 3x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线方程.

(2) 当 $a > 0$ 时, 试讨论函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的极值点的个数.

(3) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $af'(x) + 4a^2x \geq \ln x - 3a - 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $15x - y - 36 = 0$.

(2) 答案见解析.

(3) $\left[\frac{1}{4e^3}, +\infty\right)$.

【解析】 (1) 当 $a = 0$ 时, $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x$,

$$f'(x) = 2x^2 - 3, \therefore f'(3) = 15,$$

$$f(3) = 9,$$

∴ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线方程为 $y - 9 = 15(x - 3)$, 化为 $15x - y - 36 = 0$

(2) 当 $a > 0$ 时, $f'(x) = 2x^2 - 4ax - 3$, $\Delta = 16a^2 + 24 > 0$,

由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 6}}{2}$. $x_1 = \frac{2a - \sqrt{4a^2 + 6}}{2} < 0$,

$x_2 = \frac{2a + \sqrt{4a^2 + 6}}{2} > 1$.

由 $x_1 > -1$, 解得 $a > \frac{1}{4}$.

因此, 当 $a > \frac{1}{4}$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = x_1$,

∴ 当 $a > \frac{1}{4}$ 时, 当 $x \in (-1, x_1)$ 时, $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (x_1, 0)$

时, $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递减.

此时函数 $f(x)$ 取得极大值, 只有一个.

当 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 时, $f'(x) \leq 0$, 此时函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递减, 无极值点.

综上所述: 当 $a > \frac{1}{4}$ 时, 此时函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内取得一个极大值.

当 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内无极值点.

(3) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $af'(x) + 4a^2x \geq \ln x - 3a - 1$ 恒成立 $\Leftrightarrow a \geq \frac{\ln x - 1}{2x^2} (x > 0)$.

令 $g(x) = \frac{\ln x - 1}{2x^2}$, $x > 0$, $g'(x) = \frac{3 - 2\ln x}{2x^3}$,

令 $g'(x) > 0$, 解得 $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$, 此时函数 $g(x)$ 单调递增; 令 $g'(x) < 0$, 解得 $x > e^{\frac{3}{2}}$, 此时函数 $g(x)$ 单调递减.

∴ 当 $x = e^{\frac{3}{2}}$ 时, 函数 $g(x)$ 取得最大值, $g(x)_{\max} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2e^3} = \frac{1}{4e^3}$.

∴ $a \geq \frac{1}{4e^3}$.

∴ 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{4e^3}, +\infty\right)$.

【标注】 【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

4. 已知函数 $f(x) = a^2x^3 - 3ax^2 + 2$, $g(x) = -3ax + 3$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a > 0$.

(1) 若 $a = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的极值.

(3) 若 $\exists x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, 使不等式 $f(x_0) > g(x_0)$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $y = -3x + 3$.

(2) 当 $a > 2$ 时, 当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(0) = 2$,

当 $x = \frac{2}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f\left(\frac{2}{a}\right) = 2 - \frac{4}{a}$;

当 $0 < a \leq 2$ 时, 当 $x = \frac{2}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f\left(\frac{2}{a}\right) = 2 - \frac{4}{a}$;

当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(0) = 2$, 无极小值.

(3) $(-3 + \sqrt{17}, +\infty)$.

【解析】(1) 当 $a = 1$ 时,

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x^2 + 2,$$

$$\therefore f(1) = 0,$$

$$\text{又 } f'(x) = 3x^2 - 6x,$$

$$\therefore f'(1) = -3,$$

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -3x + 3$.

(2) 令 $f'(x) = 3a^2x^2 - 6ax = 3ax(ax - 2) = 0$,

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{a},$$

① 当 $0 < \frac{2}{a} < 1$, 即 $a > 2$ 时,

列表讨论 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况:

x	$(-1, 0)$	0	$\left(0, \frac{2}{a}\right)$	$\frac{2}{a}$	$\left(\frac{2}{a}, 1\right)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(0) = 2$,

当 $x = \frac{2}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f\left(\frac{2}{a}\right) = 2 - \frac{4}{a}$;

② 当 $\frac{2}{a} \geq 1$, 即 $0 < a \leq 2$ 时,

列表讨论 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况:

x	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(0) = 2$, 无极小值.

(3) 令 $F(x) = f(x) - g(x) = a^2x^3 - 3ax^2 + 3ax - 1, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$,

$$\text{令 } F'(x) = 3a^2x^2 - 6ax + 3a,$$

$$\therefore x \in \left(0, \frac{1}{2}\right], a > 0,$$

$$\therefore F'(x) = 3a^2x^2 + 3a(1 - 2x) > 0,$$

$\therefore F(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递增,

$$\therefore F(x)_{\max} = F\left(\frac{1}{2}\right),$$

依题意, 只需 $F(x)_{\max} > 0$,

$$\text{即 } \left(\frac{1}{2}\right)^3 a^2 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 a + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) a - 1 > 0,$$

$$\text{即 } a^2 + 6a - 8 > 0,$$

$$\text{解得 } a < -3 - \sqrt{7} \text{ (舍去) 或 } a > -3 + \sqrt{17},$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } (-3 + \sqrt{17}, +\infty).$$

【标注】 【知识点】利用导数解决不等式能成立问题；求函数极值（含参二次型导函数）

5. 已知函数 $f(x) = a\left(x - \frac{1}{x}\right) - \ln x$.

(1) 若 $a = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 若函数 $f(x)$ 在其定义域内为增函数, 求 a 的取值范围.

(3) 在 (2) 的条件下, 设函数 $g(x) = \frac{e}{x}$, 若在 $[1, e]$ 上至少存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) \geq g(x_0)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $y = x - 1$.

(2) $\left[\frac{1}{2} + \infty\right)$.

(3) $\left[\frac{2e}{e^2 - 1}, +\infty\right)$.

【解析】 (1) 当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x$,

$$\therefore f(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0, f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x},$$

曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 $f'(1) = 1 + 1 - 1 = 1$.

从而曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 0 = x - 1$,

$$\text{即: } y = x - 1.$$

(2) $f'(x) = a + \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - x + a}{x^2}$.

要使 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 内是增函数, 只需 $f'(x) \geq 0$, 在 $(0, +\infty)$ 内恒成立.

$$\text{即: } ax^2 - x + a \geq 0 \text{ 得: } a \geq \frac{x}{1 + x^2} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \text{ 恒成立.}$$

$$\text{由于 } x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

$$\therefore \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2},$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 内为增函数, 实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{1}{2} + \infty\right).$$

(3) $\because g(x) = \frac{e}{x}$ 在 $[1, e]$ 上是减函数,
 $\therefore x = e$ 时, $g(x)_{\min} = 1$, $x = 1$ 时, $g(x)_{\max} = e$,
 即 $g(x) \in [1, e]$,
 $f'(x) = \frac{ax^2 - x + a}{x^2}$, 令 $h(x) = ax^2 - x + a$,
 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 由 (II) 知 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上是增函数, $f(1) = 0 < 1$,
 又 $g(x) = \frac{e}{x}$ 在 $[1, e]$ 上是减函数,
 故只需 $f(x)_{\max} \geq g(x)_{\min}$, $x \in [1, e]$,
 而 $f(x)_{\max} = f(e) = a\left(e - \frac{1}{e}\right) - \ln e$, $g(x)_{\min} = 1$,
 即: $a\left(e - \frac{1}{e}\right) - \ln e \geq 1$,
 解得 $a \geq \frac{2e}{e^2 - 1}$.
 $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{2e}{e^2 - 1}, +\infty\right)$.

【标注】 【知识点】利用导数解决不等式能成立问题; 区间上恒单调

6. 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = -x^2 + ax - 3$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ ($t > 0$) 上的最小值.
 (2) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.
 (3) 探讨函数 $F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex}$ 是否存在零点? 若存在, 求出函数 $F(x)$ 的零点, 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时, $f_{\min}(x) = -\frac{1}{e}$, 当 $t \geq \frac{1}{e}$ 时, $f_{\min}(x) = t \ln t$.

(2) $(-\infty, 4]$.

(3) 不存在, 理由见解析.

【解析】 (1) $f(x) = x \ln x$,

$f'(x) = \ln x + 1$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{e}$.

① 当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时, 在 $x \in \left[t, \frac{1}{e}\right)$ 上 $f'(x) < 0$; 在 $x \in \left(\frac{1}{e}, t+2\right]$ 上 $f'(x) > 0$.

因此, $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{e}$ 处取得极小值, 也是最小值. $f_{\min}(x) = -\frac{1}{e}$.

② 当 $t \geq \frac{1}{e}$, $f'(x) \geq 0$, 因此 $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ 上单调递增, $f_{\min}(x) = f(t) = t \ln t$.

(2) 由对一切 $x \in (0, +\infty)$, $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立,

即有 $2x \ln x \geq -x^2 + ax - 3$.

即 $a \leq 2 \ln x + x + \frac{3}{x}$ 恒成立,

$$\text{令 } h(x) = 2\ln x + x + \frac{3}{x}, h'(x) = \frac{2}{x} + 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{x^2},$$

当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 是增函数,

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 是减函数,

$$\therefore a \leq h(x)_{\min} = h(1) = 4.$$

即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 4]$.

$$(3) \text{ 令 } m(x) = 2x \ln x,$$

$$m'(x) = 2(1 + \ln x),$$

当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 递减;

当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 递增;

$$\therefore m(x) \text{ 的最小值为 } m\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e},$$

$$\text{则 } 2x \ln x \geq -\frac{2}{e},$$

$$\therefore \ln x \geq -\frac{1}{ex},$$

$$F(x) = \ln x - \frac{1}{ex} + \frac{2}{ex} = 0 \text{ ①}$$

$$\text{则 } F(x) = \ln x - \frac{1}{ex} + \frac{2}{ex} \geq -\frac{1}{ex} - \frac{1}{ex} + \frac{2}{ex} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e} - \frac{2}{e^x} \right),$$

$$\text{令 } G(x) = \frac{1}{e} - \frac{x}{e^x}, \text{ 则 } G'(x) = \frac{x-1}{e^x},$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $G'(x) < 0$, $G(x)$ 递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $G'(x) > 0$, $G(x)$ 递增;

$$\therefore G(x) \geq G(1) = 0 \text{ ②}$$

$$\therefore F(x) = \ln x - \frac{1}{ex} + \frac{2}{ex} \geq -\frac{1}{ex} - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x} \right) \geq 0,$$

$\therefore$ ①②中取等号的条件不同,

$\therefore F(x) > 0$, 故函数 $F(x)$ 没有零点.

【标注】 【知识点】直接求函数的最值(不含参);求函数零点(含参指对型导函数);利用导数解决不等式恒成立问题

7. 已知函数 $f(x) = ax^2 - (2a+1)x + \ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = 2ax^2 - 2(a+1)x$ 恰有两个不等的实根, 求实数 a 的取值范围.

(3) 设 $g(x) = e^x - x - 1$, 若对任意的 $x_1 \in (0, +\infty), x_2 \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) 答案见解析.

(2) $a > 1$.

(3) $[-1, 0]$

【解析】(1) 当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x) = x^2 - 3x + \ln x, f'(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$,

令 $f'(x) = 0$ 得: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$,

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大	单调递减	极小	单调递增

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

当 $x = \frac{1}{2}$ 时: $f(x)$ 有极大值, 且 $f(x)_{\text{极大值}} = f(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4} - \ln 2$,

当 $x = 1$ 时: $f(x)$ 有极小值, 且 $f(x)_{\text{极小值}} = -2$.

(2) $\because f(x) = 2ax^2 - 2(a+1)x$,

$\therefore ax^2 - (2a+1)x + \ln x = 2ax^2 - 2(a+1)x$,

$\therefore ax^2 - x = \ln x, x \in (0, +\infty)$,

显然 $a \leq 0$ 时, $y = ax^2 - x$ 与 $y = \ln x$ 只有 1 个交点, 不合题意,

当 $a = 1$ 时, 函数 $y = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$ 时: $y_{\min} = -\frac{1}{4}$, 而

$y = \ln \frac{1}{2} < \ln e^{-\frac{1}{4}}$,

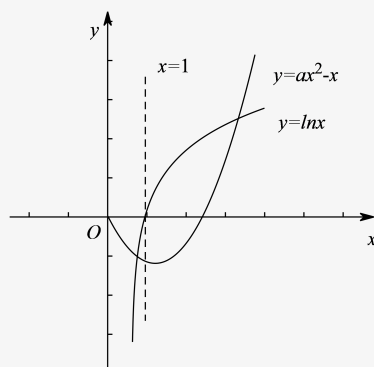
$\therefore 0 < a \leq 1$ 时, $y = ax^2 - x$ 与 $y = \ln x$ 只有 1 个交点, 不合题意,

$a > 1$ 时, 画出函数 $y = ax^2 - x$ 与 $y = \ln x$ 的图象,

如图示:

图象有 2 个交点,

综上: $a > 1$.



(3) 由 $g(x) = e^x - x - 1$, 则 $g'(x) = e^x - 1$,

令 $g'(x) > 0$, 解得 $x > 0$, 令 $g'(x) < 0$, 解得 $x < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 是减函数, 在 $(0, +\infty)$ 是增函数,

即 $g(x)_{\text{最小值}} = g(0) = 0$.

对于任意的 $x_1 \in (0, +\infty), x_2 \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 恒成立, 则有 $f(x_1) \leq g(0)$ 即可.

即不等式 $f(x) \leq 0$ 对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

$$f'(x) = \frac{2ax^2 - (2a+1)x + 1}{x},$$

(1) 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = \frac{1-x}{x}$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x > 1$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 是增函数, 在 $(1, +\infty)$ 是减函数,

$$\therefore f(x)_{\text{最大值}} = f(1) = -1 < 0,$$

$\therefore a = 0$ 符合题意.

$$(2) \text{ 当 } a < 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{(2ax-1)(x-1)}{x},$$

令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x > 1$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 是增函数, 在 $(1, +\infty)$ 是减函数,

$$\therefore f(x)_{\text{最大值}} = f(1) = -a - 1 \leq 0,$$

得 $-1 \leq a < 0$,

$\therefore -1 \leq a < 0$ 符合题意.

$$(3) \text{ 当 } a > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{(2ax-1)(x-1)}{x}, f'(x) = 0 \text{ 得: } x_1 = \frac{1}{2a}, x_2 = 1,$$

$a > \frac{1}{2}$ 时, $0 < x_1 < 1$, 令 $f'(x) > 0$, 解得: $0 < x < \frac{1}{2a}$ 或 $x > 1$,

令 $f'(x) < 0$, 解得: $\frac{1}{2a} < x < 1$,

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 是增函数,

而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 这与对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ 时 $f(x) \leq 0$ 矛盾.

同理 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时也不成立.

综上所述: a 的取值范围为 $[-1, 0]$.

【标注】 【知识点】 利用导数解决不等式恒成立问题

8. 设函数 $f(x) = ae^x(x+1)$ (其中 $e = 2.71828 \dots$), $g(x) = x^2 + bx + 2$, 已知它们在 $x = 0$ 处有相同的切线.

(1) 求函数 $f(x)$, $g(x)$ 的解析式.

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ ($t > -3$) 上的最小值.

(3) 若对 $\forall x \geq -2$, $kf(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

【答案】 (1) $f(x) = 2e^x(x+1)$, $g(x) = x^2 + 4x + 2$.

$$(2) f(x) = \begin{cases} -2e^{-2} & (-3 < t < -2) \\ 2e^t(t+1) & (t \geq -2) \end{cases}.$$

(3) $[1, e^2]$.

【解析】 (1) $f'(x) = ae^x(x+2)$, $g'(x) = 2x+b$,

由题意, 两函数在 $x = 0$ 处有相同的切线.

$$\therefore f'(0) = 2a, g'(0) = b,$$

$$\therefore 2a = b, f(0) = a = g(0) = 2,$$

$$\therefore a = 2, b = 4,$$

$$\therefore f(x) = 2e^x(x+1), g(x) = x^2 + 4x + 2.$$

$$(2) f'(x) = 2e^x(x+2), \text{ 由 } f'(x) > 0 \text{ 得 } x > -2, \text{ 由 } f'(x) < 0 \text{ 得 } x < -2,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 单调递增, 在 $(-\infty, -2)$ 单调递减.

$$\therefore t > -3,$$

$$\therefore t+1 > -2.$$

① 当 $-3 < t < -2$ 时, $f(x)$ 在 $[t, -2]$ 单调递减, $[-2, t+1]$ 单调递增,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(-2) = -2e^{-2}.$$

② 当 $t \geq -2$ 时, $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ 单调递增,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(t) = 2e^t(t+1);$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -2e^{-2} & (-3 < t < -2) \\ 2e^t(t+1) & (t \geq -2) \end{cases}.$$

$$(3) \text{ 令 } F(x) = kf(x) - g(x) = 2ke^x(x+1) - x^2 - 4x - 2,$$

由题意当 $x \geq -2$, $F(x)_{\min} \geq 0$,

$\therefore \forall x \geq -2, kf(x) \geq g(x)$ 恒成立,

$$\therefore F(0) = 2k - 2 \geq 0,$$

$$\therefore k \geq 1$$

$$F'(x) = 2ke^x(x+1) + 2ke^x - 2x - 4 = 2(x+2)(ke^x - 1),$$

$$\therefore x \geq -2, \text{ 由 } F'(x) > 0 \text{ 得 } e^x > \frac{1}{k},$$

$$\therefore x > \ln \frac{1}{k}; \text{ 由 } F'(x) < 0 \text{ 得 } x < \ln \frac{1}{k},$$

$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{1}{k})$ 单调递减, 在 $(\ln \frac{1}{k}, +\infty)$ 单调递增

① 当 $\ln \frac{1}{k} < -2$, 即 $k > e^2$ 时, $F(x)$ 在 $[-2, +\infty)$ 单调递增,

$$F(x)_{\min} = F(-2) = -2ke^{-2} + 2 = \frac{2}{e^2}(e^2 - k) < 0, \text{ 不满足 } F(x)_{\min} \geq 0.$$

② 当 $\ln \frac{1}{k} = -2$, 即 $k = e^2$ 时, 由①知, $F(x)_{\min} = F(-2) = \frac{2}{e^2}(e^2 - k) = 0$, 满足

$$F(x)_{\min} \geq 0.$$

③ 当 $\ln \frac{1}{k} > -2$, 即 $1 \leq k < e^2$ 时, $F(x)$ 在 $[-2, \ln \frac{1}{k}]$ 单调递减, 在 $(\ln \frac{1}{k}, +\infty)$ 单调递增, $F(x)_{\min} = F(\ln \frac{1}{k}) = \ln k(2 - \ln k) > 0$, 满足 $F(x)_{\min} \geq 0$.

综上所述, 满足题意的 k 的取值范围为 $[1, e^2]$.

【标注】 【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

9. 已知函数 $g(x) = -2ax + \ln x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $g(x)$ 在点 $(2, g(2))$ 处切线的方程.

(2) 令 $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + g(x)$, 已知函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 \cdot x_2 > \frac{1}{2}$.

① 求实数 a 的取值范围.

② 若存在 $x_0 \in \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$, 使不等式

$f(x_0) + \ln(a+1) > m(a^2 - 1) - (a+1) + 2\ln 2$ 对任意实数 a (取值范围内的值) 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $y + 4 - \ln 2 = \frac{3}{2}(x - 2)$.

(2) ① $M = (1, 2)$.

② $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$.

【解析】 (1) 当 $a = 1$ 时, $g(x) = -2x + \ln x$, $g'(x) = -2 + \frac{1}{x}$,

当 $x = 2$ 时, $g'(2) = -\frac{3}{2}$, $g(2) = -4 + \ln 2$,

$\therefore g(x)$ 在 $(2, g(2))$ 处的切线方程为 $y + 4 - \ln 2 = \frac{3}{2}(x - 2)$.

(2) ① 对函数求导可得, $f'(x) = \frac{ax^2 - 2ax + 1}{x} (x > 0)$,

令 $f'(x) = 0$ 可得 $ax^2 - 2ax + 1 = 0$.

$\therefore \begin{cases} a \neq 0 \\ 4a^2 - 4a > 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{2} \end{cases}$, 解得 a 的取值范围 $M = (1, 2)$.

② 由 $ax^2 - 2ax + 1 = 0$, 解得 $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{a^2 - a}}{a}$, $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{a^2 - a}}{a}$,

而 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上递增, 在 (x_1, x_2) 上递减, 在 $(x_2, +\infty)$ 上递增.

$\therefore 1 < a < 2$,

$\therefore x_2 = 1 + \frac{\sqrt{a^2 - a}}{a} < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$ 单调递增,

$\therefore$ 在 $\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$ 上, $f(x)_{\max} = f(2) = -2a + \ln 2$.

$\therefore \exists x_0 \in \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$, 使不等式 $f(x_0) + \ln(a+1) > m(a^2 - 1) - (a+1) + 2\ln 2$

对 $\forall a \in M$ 恒成立,

等价于不等式 $-2a + \ln 2 + \ln(a+1) > m(a^2 - 1) - (a+1) + 2\ln 2$ 恒成立,

即不等式 $\ln(a+1) - ma^2 - a + m - \ln 2 + 1 > 0$ 对任意的 $a (1 < a < 2)$ 恒成立.

令 $g(a) = \ln(a+1) - ma^2 - a + m - \ln 2 + 1$, 则 $g(1) = 0$,

$$g'(a) = \frac{-2ma(a+1 + \frac{1}{2m})}{a+1},$$

①当 $m \geq 0$ 时, $g'(a) < 0$, $g(a)$ 在 $(1, 2)$ 上递减.

$g(a) < g(1) = 0$, 不合题意.

$$\textcircled{2} \text{ 当 } m < 0 \text{ 时, } g'(a) = \frac{-2ma(a+1 + \frac{1}{2m})}{a+1},$$

$\therefore 1 < a < 2$,

若 $-\left(1 + \frac{1}{2\pi}\right) > 1$, 即 $-\frac{1}{4} < m < 0$ 时, 则 $g(a)$ 在 $(1, 2)$ 上先递减,

$\therefore g(1) = 0$,

$\therefore 1 < a < 2$ 时, $g(a) > 0$ 不能恒成立.

若 $-1\left(1 + \frac{1}{2\pi}\right) \leq 1$, 即 $m \leq -\frac{1}{4}$ 时, 则 $g(a)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增,

$\therefore g(a) > g(1) = 0$ 恒成立,

$\therefore m$ 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$.

【标注】 【知识点】导数与最值；利用导数解决不等式恒成立问题；已知极值情况求参数范围；导数的几何意义

10. 设函数 $f(x) = ax - 2 - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 当 $a = 1$ 时, 试判断 $f(x)$ 零点的个数.

(3) 当 $a = 1$ 时, 若对 $\forall x \in (1, +\infty)$, 都有 $(4k - 1 - \ln x)x + f(x) - 1 < 0 (k \in \mathbf{Z})$ 成立, 求 k 的最大值.

【答案】 (1) 见解析

(2) 见解析

(3) 见解析

【解析】 (1) 解: $f'(x) = a - \frac{1}{x}, (x > 0)$.

$a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$a > 0$ 时, $f'(x) = \frac{a(x - \frac{1}{a})}{x}, (x > 0)$.

则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

(2) $a = 1$ 时, $f(x) = x - 2 - \ln x (x > 0)$.

$f'(x) = \frac{x-1}{x}, (x > 0)$.

则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

$x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值即最小值, $f(1) = -1$.

$x \rightarrow 0_+$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 存在两个零点.

(3) 当 $a = 1$ 时, 对 $\forall x \in (1, +\infty)$, 都有 $(4k - 1 - \ln x)x + f(x) - 1 < 0 (k \in \mathbf{Z})$ 成立,

化为: $4k < \ln x + \frac{\ln x + 3}{x} = g(x)$,

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1 - (\ln x + 3)}{x^2} = \frac{x - \ln x - 2}{x^2}.$$

令 $u(x) = x - \ln x - 2$, $x \in (1, +\infty)$,

$u'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$, $\therefore$ 函数 $u(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 时单调递增,

$u(3) = 1 - \ln 3$, $u(4) = 2 - 2\ln 2$,

$\therefore$ 存在唯一的 $x_0 \in (3, 4)$, 使得 $u(x_0) = 0$, 即 $x_0 - \ln x_0 - 2 = 0$,

函数 $g(x)$ 在 $(1, x_0)$ 内单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 内单调递增.

$$g(x)_{\min} = g(x_0) = \ln x_0 + \frac{\ln x_0 + 3}{x_0} = x_0 - 2 + \frac{x_0 - 2 + 3}{x_0} = x_0 + \frac{1}{x_0} - 1 \in \left(\frac{7}{3}, \frac{13}{4}\right)$$

$$\therefore 4k < \left(x_0 + \frac{1}{x_0} - 1\right)_{\min}, k \in \mathbf{Z}.$$

$\therefore k$ 的最大值为 0.

【标注】 【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用导数求函数的零点及个数

2. 值域型问题

11. 已知函数 $f(x) = \frac{4x^2 - 7}{2 - x}$, $x \in [0, 1]$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和值域;

(2) 设 $a \geq 1$, 函数 $g(x) = x^3 - 3a^2x - 2a$, $x \in [0, 1]$, 若对于任意 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x)$ 为减函数; 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $f(x)$ 是增函数;

当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[-4, -3]$.

(2) a 的取值范围为 $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$.

【解析】 (1) 对函数 $f(x)$ 求导, 得 $f'(x) = \frac{-4x^2 + 16x - 7}{(2 - x)^2} = -\frac{(2x - 1)(2x - 7)}{(2 - x)^2}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{7}{2}$.

当 x 变化时, $f'(x)$ 、 $f(x)$ 的变化情况如下:

x	0	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	1
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	$-\frac{7}{2}$	$\searrow$	极小值 -4	$\nearrow$	-3

所以, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x)$ 为减函数; 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $f(x)$ 是增函数;

当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[-4, -3]$.

(2) 对函数 $g(x)$ 求导, 得 $g'(x) = 3(x^2 - a^2)$.

因为 $a \geq 1$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 3(1 - a^2) \leq 0$.

因此当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x)$ 为减函数, 从而当 $x \in [0, 1]$ 时有 $g(x) \in [g(1), g(0)]$.

又 $g(1) = 1 - 2a - 3a^2$, $g(0) = -2a$, 即当 $x \in [0, 1]$ 时有 $g(x) \in [1 - 2a - 3a^2, -2a]$.

任给 $x_1 \in [0, 1]$, $f(x_1) \in [-4, -3]$, 存在 $x_0 \in [0, 1]$ 使得 $g(x_0) = f(x_1)$,

则 $[1 - 2a - 3a^2, -2a] \supseteq [-4, -3]$, 即 $\begin{cases} 1 - 2a - 3a^2 \leq -4 \\ -2a \geq -3 \end{cases}$

解式①得 $a \geq 1$ 或 $a \leq -\frac{5}{3}$; 解式②得 $a \leq \frac{3}{2}$. 又 $a \geq 1$,

故 a 的取值范围为 $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$.

【标注】 【知识点】直接求函数的单调性 (不含参); 直接求函数的最值 (不含参); 等式的能成立或恒成立问题

12. 已知函数 $f(x) = ax + \ln x$, $x \in (1, e)$, 且 $f(x)$ 有极值.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(3) 函数 $g(x) = x^3 - x - 2$, 证明: $\forall x_1 \in (1, e)$, $\exists x_0 \in (1, e)$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立.

【答案】 (1) $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$.

(2) 当 $-1 < a \leq \frac{1}{1-e}$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 $(ae + 1, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$
 当 $\frac{1}{1-e} < a < -\frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 $(a, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$.

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) 由 $f(x) = ax + \ln x$ 求导可得 $f'(x) = a + \frac{1}{x}$,

令 $f'(x) = a + \frac{1}{x} = 0$, 可得 $a = -\frac{1}{x}$.

$\because x \in (1, e)$, $\therefore -\frac{1}{x} \in \left(-1, -\frac{1}{e}\right)$, $\therefore a \in \left(-1, -\frac{1}{e}\right)$

又因为 $x \in (1, e)$

x	$\left(1, -\frac{1}{a}\right)$	$-\frac{1}{a}$	$\left(-\frac{1}{a}, e\right)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以, $f(x)$ 有极值, 实数 a 的取值范围为 $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$.

(2) 由 (1) 可知 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(-\frac{1}{a}\right) = -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right)$.

又 $\because f(1) = a$, $f(e) = ae + 1$,

由 $a \geq ae + 1$, 解得 $a \leq \frac{1}{1-e}$, 又 $\because -1 < \frac{1}{1-e} < -\frac{1}{e}$

$\therefore$ 当 $-1 < a \leq \frac{1}{1-e}$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 $(ae + 1, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$

当 $\frac{1}{1-e} < a < -\frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 $(a, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right))$.

(3) 由 $g(x) = x^3 - x - 2$ 求导可得 $g'(x) = 3x^2 - 1$.

令 $g'(x) = 3x^2 - 1 = 0$, 解得 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

令 $g'(x) = 3x^2 - 1 > 0$, 解得 $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $\because x \in (1, e) \subseteq \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \infty\right)$, $\therefore g(x)$ 在 $(1, e)$ 上为单调递增函数.

$\therefore g(1) = -2$, $g(e) = e^3 - e - 2$,

$\therefore g(x)$ 在 $x \in (1, e)$ 的值域为 $(-2, e^3 - e - 2)$.

$\because e^3 - e - 2 > -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right)$, $ae + 1 > -2a > -2$,

$\therefore (ae + 1, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right)) \subseteq (-2, e^3 - e - 2)$,

$(a, -1 + \ln\left(-\frac{1}{a}\right)) \subseteq (-2, e^3 - e - 2)$.

$\therefore \forall x_1 \in (1, e)$, $\exists x_0 \in (1, e)$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立.

【标注】 【知识点】导数与单调性

13. 已知 $x \in [0, 1]$, 函数 $f(x) = x^2 - \ln(x + \frac{1}{2})$, $g(x) = x^3 - 3a^2x - 4a$, 设 $a \leq -1$, 若

$\forall x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 $a \leq -\frac{3}{2}$.

【解析】 $f'(x) = 2x - \frac{1}{x + \frac{1}{2}}$, 令 $f'(x) = 0$ 解得 : $x = \frac{1}{2}, x = -1$ (舍去)

列表 :

x	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\ln 2$	↘	$\frac{1}{4}$	↗	$1 - \ln \frac{3}{2}$

可知 $f(x)$ 的单调减区间是 $(0, \frac{1}{2})$, 增区间是 $(\frac{1}{2}, 1)$;

因为 $\frac{1}{4} < 1 - \ln \frac{3}{2} = \ln 2 - (\ln 3 - 1) < \ln 2$,

所以当 $x \in [0, 1]$ 时 , $f(x)$ 的值域为 $[\frac{1}{4}, \ln 2]$

$g'(x) = 3(x^2 - a^2)$ 因为 $a \leq -1, x \in (0, 1)$, 所以 $g'(x) < 0$,

$g(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的减函数 , $g(1) \leq g(x) \leq g(0)$ 所以 $g(x) \in [1 - 4a - 3a^2, -4a]$

因为当 $x \in [0, 1]$ 时 , $f(x)$ 的值域为 $[\frac{1}{4}, \ln 2]$.

由题意知 : $[\frac{1}{4}, \ln 2] \subseteq [1 - 4a - 3a^2, -4a]$

所以 $\begin{cases} 1 - 4a - 3a^2 \leq \frac{1}{4} \\ -4a \geq \ln 2 \end{cases}$, 又 $a \leq -1$, 得 $a \leq -\frac{3}{2}$.

【标注】 【知识点】 利用导数解决不等式恒成立与能成立综合问题