

02导数解答1

1. 恒能成立问题

- 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x$.
 - 求 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .
 - 若存在 $x_0 \in \left[-1, \ln \frac{4}{3}\right]$, 满足 $a - e^x + 1 + x < 0$ 成立 , 求 a 的取值范围 .
- 已知函数 $f(x) = ax + b \ln x (a, b \in \mathbf{R})$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{2}x - 1$.
 - 求 a, b 的值 .
 - 当 $x > 1$ 时 , $f(x) + \frac{k}{x} < 0$ 恒成立 , 求实数 k 的取值范围 .
 - 设 $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x$, 求证 : 对于 $x \in (0, +\infty)$, $g(x) - f(x) > 2$ 恒成立 .
- 已知函数 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2ax^2 - 3x (a \in \mathbf{R})$.
 - 当 $a = 0$ 时 , 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线方程 .
 - 当 $a > 0$ 时 , 试讨论函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的极值点的个数 .
 - 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $af'(x) + 4a^2x \geq \ln x - 3a - 1$ 恒成立 , 求实数 a 的取值范围 .
- 已知函数 $f(x) = a^2x^3 - 3ax^2 + 2, g(x) = -3ax + 3, x \in \mathbf{R}$, 其中 $a > 0$.
 - 若 $a = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .
 - 求函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的极值 .
 - 若 $\exists x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, 使不等式 $f(x_0) > g(x_0)$ 成立 , 求 a 的取值范围 .
- 已知函数 $f(x) = a\left(x - \frac{1}{x}\right) - \ln x$.
 - 若 $a = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .
 - 若函数 $f(x)$ 在其定义域内为增函数 , 求 a 的取值范围 .
 - 在 (II) 的条件下 , 设函数 $g(x) = \frac{e}{x}$, 若在 $[1, e]$ 上至少存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) \geq g(x_0)$ 成立 , 求实数 a 的取值范围 .
- 已知函数 $f(x) = x \ln x, g(x) = -x^2 + ax - 3$.
 - 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+2] (t > 0)$ 上的最小值 .
 - 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立 , 求实数 a 的取值范围 .
 - 探讨函数 $F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex}$ 是否存在零点 ? 若存在 , 求出函数 $F(x)$ 的零点 , 若不存在 , 请说明理由 .
- 已知函数 $f(x) = ax^2 - (2a+1)x + \ln x, a \in \mathbf{R}$.
 - 当 $a = 1$ 时 , 求 $f(x)$ 的单调区间和极值 .

- (2) 若关于 x 的方程 $f(x) = 2ax^2 - 2(a+1)x$ 恰有两个不等的实根, 求实数 a 的取值范围 .
- (3) 设 $g(x) = e^x - x - 1$, 若对任意的 $x_1 \in (0, +\infty)$, $x_2 \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围 .
8. 设函数 $f(x) = ae^x(x+1)$ (其中 $e = 2.71828 \dots$), $g(x) = x^2 + bx + 2$, 已知它们在 $x = 0$ 处有相同的切线 .
- (1) 求函数 $f(x)$, $g(x)$ 的解析式 .
- (2) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+1] (t > -3)$ 上的最小值 .
- (3) 若对 $\forall x \geq -2$, $kf(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围 .
9. 已知函数 $g(x) = -2ax + \ln x$.
- (1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $g(x)$ 在点 $(2, g(2))$ 处切线的方程 .
- (2) 令 $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + g(x)$, 已知函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 \cdot x_2 > \frac{1}{2}$.
- ① 求实数 a 的取值范围 .
- ② 若存在 $x_0 \in \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$, 使不等式 $f(x_0) + \ln(a+1) > m(a^2 - 1) - (a+1) + 2\ln 2$ 对任意实数 a (取值范围内的值) 恒成立, 求实数 m 的取值范围 .
10. 设函数 $f(x) = ax - 2 - \ln x (a \in \mathbf{R})$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间 .
- (2) 当 $a = 1$ 时, 试判断 $f(x)$ 零点的个数 .
- (3) 当 $a = 1$ 时, 若对 $\forall x \in (1, +\infty)$, 都有 $(4k - 1 - \ln x)x + f(x) - 1 < 0 (k \in \mathbf{Z})$ 成立, 求 k 的最大值 .

2. 值域型问题

11. 已知函数 $f(x) = \frac{4x^2 - 7}{2 - x}, x \in [0, 1]$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间和值域 ;
- (2) 设 $a \geq 1$, 函数 $g(x) = x^3 - 3a^2x - 2a, x \in [0, 1]$, 若对于任意 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求 a 的取值范围 .
12. 已知函数 $f(x) = ax + \ln x, x \in (1, e)$, 且 $f(x)$ 有极值 .
- (1) 求实数 a 的取值范围 ;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的值域 ;
- (3) 函数 $g(x) = x^3 - x - 2$, 证明: $\forall x_1 \in (1, e), \exists x_0 \in (1, e)$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立 .
13. 已知 $x \in [0, 1]$, 函数 $f(x) = x^2 - \ln(x + \frac{1}{2}), g(x) = x^3 - 3a^2x - 4a$, 设 $a \leq -1$, 若 $\forall x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求 a 的取值范围 .

