

离散型随机变量分布列

一轮整合计划

常见的排列问题及处理手段？

- ①特殊元素：优先处理
- ②相邻元素：捆绑法
- ③不相邻元素：插空法
- ④定序元素：除序法
- ⑤正面不好处理：排除法

常见的组合问题及处理手段？

- ①不同元素分组分配问题：分清楚是分组还是分配，是全均分，部分均分还是全不均分
- ②相同元素分组问题：插板法

二项式的通项公式？

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$$

解析几何中常见的图形面积求法

(1) 三角形面积问题

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|} \cdot \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

(2) 焦点三角形的面积

$$S_{\triangle ABF_1} = \frac{1}{2} |F_1 F_2| \cdot |y_1 - y_2| = c |y_1 - y_2| = \frac{c \sqrt{\Delta_y}}{|a|}.$$

(3) 平行四边形的面积

$$S_{ABCD} = |AB| \cdot d = \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|} \cdot \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{\Delta_x} |m_1 - m_2|}{|a|}.$$

一、离散型随机变量

1. 离散型随机变量的分布列

(1) 随着试验结果变化而变化的变量叫做随机变量，随机变量常用字母 $X, Y, \xi, \eta, \dots$ 表示。所有取值

可以一一列出的随机变量叫做离散型随机变量 .

(2) 一般地, 若离散型随机变量 X 可能取的不同值为 $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, X 取每一个值 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的概率 $P(X = x_i) = p_i$, 则称表:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

为离散型随机变量 X 的概率分布列, 简称为 X 的分布列, 具有如下性质:

① $p_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$;

② $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和.

【温馨提示】

离散型随机变量的分布列的两个性质是检验一个分布列正确与否的标准; 还可以利用性质②间接求出某一个随机变量对应的概率 (前提是你对其它随机变量的概率的正确性足够自信).

1. 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi = i) = a\left(\frac{1}{3}\right)^i, i = 1, 2, 3$, 则实数 a 的值为 ().

- A. 1 B. $\frac{9}{13}$ C. $\frac{11}{13}$ D. $\frac{27}{13}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi = i) = a\left(\frac{1}{3}\right)^i, i = 1, 2, 3$,

$$\therefore a\left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right] = 1, \text{ 解得 } a = \frac{27}{13}.$$

故选 D.

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列

2. 已知随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	0.2	$0.4 - a$	$0.5 - a$	a

则实数 a 等于 ____.

【答案】 0.1

【解析】 由分布列的概率总和为 1, 即 $0.2 + 0.4 - a + 0.5 - a + a = 1$, $\therefore a = 0.1$.

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列；离散型随机变量的数学期望

2. 条件概率与相互独立事件

(1) 对于任何两个事件 A 和 B ，在已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率叫做条件概率，用符号“

$P(B|A)$ ”来表示．其公式为 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ ， $P(A) > 0$ ．

在古典概型中，若用 $n(A)$ 表示事件 A 中基本事件的个数，则 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)}$ ．

(2) 对于事件 A, B ，若事件 A 的发生与事件 B 的发生互不影响，则称事件 A, B 是相互独立事件．

若 A 与 B 相互独立，则 $P(B|A) = P(B)$ ， $P(AB) = P(A)P(B)$ ．

若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\bar{B}$ ， $\bar{A}$ 与 B ， $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 都相互独立．

若 $P(A)P(B) = P(AB)$ ，则 A 与 B 相互独立．

【教师可见】

解决条件概率问题的步骤：

第一步：判断是否为条件概率，若题目中出现“已知”，“在……前提下”等字眼，一般为条件概率．题目中若没有出现上述字眼，但已知事件的出现影响所求事件的概率时，也需注意是否为条件概率．若为条件概率，则进行第二步．

第二步：计算概率，这里有两种思路．

思路一：缩减样本空间计算条件概率．如求 $P(B|A)$ ，可分别求出事件 A ， AB 包含的基本事件的个数，再利用公式 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)}$ 计算．

思路二：直接利用条件概率的计算公式计算条件概率，即先分别计算出 $P(AB)$ ， $P(A)$ ，再利用公式 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 计算．

3. 已知事件 A 发生的概率为 $\frac{4}{15}$ ，事件 B 发生的概率为 $\frac{9}{30}$ ，事件 A, B 同时发生的概率为 $\frac{1}{5}$ ，则在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率为()．

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{8}{9}$

D. $\frac{3}{4}$

【答案】D

【解析】由题意可知

$$P(A) = \frac{4}{15}, P(B) = \frac{9}{30}, P(AB) = \frac{1}{5},$$
$$\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{15}} = \frac{3}{4}.$$

【标注】【知识点】条件概率

4. 某地区空气质量监测资料表明，一天的空气质量为优良的概率是0.8，连续两天为优良的概率是0.6，已知某天的空气质量为优良，则随后一天的空气质量为优良的概率是（ ）.
- A. 0.48 B. 0.12 C. 0.75 D. 0.32

【答案】 C

【解析】 设A表示一天的空气质量为优良，
B表示随后一天的空气质量为优良，
由题意知 $P(A) = 0.8$ ， $P(AB) = 0.6$ ，
 $\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4} = 0.75$.
故选C.

【标注】【知识点】条件概率

5. 在5道题中有3道理科题和2道文科题，如果不放回地依次抽取2道题，则在第一次抽到理科题的条件下，第二次抽到理科题的概率为（ ）.
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】 C

【解析】 因为5道题中有3道理科题和2道文科题，所以第一次抽到理科题时，剩余4道题中，有2道理科题，所以第2次抽到理科题的概率 $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. 故选C.

【标注】【知识点】条件概率

6. 甲、乙两人参加歌唱比赛，晋级概率分别为 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{3}{4}$ ，且两人是否晋级相互独立，则两人中恰有一人晋级的概率为（ ）.
- A. $\frac{19}{20}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{7}{20}$

【答案】 D

【解析】 甲、乙两人参加歌唱比赛，晋级概率分别为 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{3}{4}$ ，且两人是否晋级相互独立，
故有甲晋级乙不能晋级的概率为 $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}$ ，
则两人中恰有一人晋级的概率为 $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{20}$.
所以D选项是正确的.

故选D.

【标注】 【素养】 数学运算

【素养】逻辑推理

【知识点】相互独立事件的概率乘法公式

7. 某一批花生种子，若每1粒发芽的概率为 $\frac{3}{5}$ ，则播下3粒种子恰有2粒发芽的概率为（ ）：
- A. $\frac{18}{125}$
- B. $\frac{36}{125}$
- C. $\frac{48}{125}$
- D. $\frac{54}{125}$

【答案】 D

【解析】 由于每1粒发芽的概率为 $\frac{3}{5}$ ，则播下3粒种子恰有2粒发芽的概率为 $C_3^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{54}{125}$

故选：D.

【标注】【知识点】n次独立重复试验与二项分布

8. 在4次独立重复试验中事件A出现的概率相同，若事件A至少发生1次的概率为 $\frac{65}{81}$ ，则事件A在1次试验中出现的概率为（ ）.
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】 A

【解析】 设事件 A 在1次试验中出现的概率为 p ,

∴事件A至少发生1次的概率为 $\frac{65}{81}$ ，

$$\therefore \text{事件} A \text{一次都不发生的概率为} 1 - \frac{65}{81} = \frac{16}{81},$$

$$\therefore C_4^0(1-p)^4 = \frac{16}{81} ,$$

解得 $p = \frac{1}{3}$.

故选A.

【标注】【知识点】相互独立事件的辨析；相互独立事件的概率乘法公式

3. 离散型随机变量的期望与方差

一般地, 若离散型随机变量 X 的分布列为:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

则称

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

为随机变量 X 的均值或数学期望（简称期望），它反映了离散型随机变量取值的平均水平。

称

$$D(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + (x_2 - E(X))^2 \cdot p_2 + \cdots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$$

为随机变量 X 的方差，它刻画了随机变量 X 与其均值 $E(X)$ 的平均偏离程度。并称其算术平方根 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差，它们都反映了离散型随机变量的取值相对于期望的平均波动的大小（离散程度）。

【温馨提示】

①方差还有另一种求法： $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$ 。

② X 为随机变量， a, b 为常数，则 $E(aX + b) = aE(X) + b$ ， $D(aX + b) = a^2 D(X)$ 。

9. 已知随机变量 X 的概率分布列如表所示，且 X 的数学期望 $E(X) = 6$ ，则（ ）。

X	5	6	7	8
P	0.4	a	b	0.1

A. $a = 0.3, b = 0.2$

B. $a = 0.2, b = 0.3$

C. $a = 0.4, b = 0.1$

D. $a = 0.1, b = 0.4$

【答案】A

【解析】
$$\begin{cases} E_x = 5 \times 0.4 + 6a + 7b + 8 \times 0.1 = 6 \\ 0.4 + a + b + 0.1 = 1 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} a = 0.3 \\ b = 0.2 \end{cases}$$

故选A。

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望

10. 已知随机变量 X 的分布列为：

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	a

随机变量 $Y = 2X + 1$ ，则 X 的数学期望 $EX =$ _____； Y 的方差 $DY =$ _____。

【答案】 $-\frac{1}{6}; \frac{29}{9}$

【解析】 由随机变量 X 的分布列得：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + a = 1,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{3},$$

$$\therefore E(X) = -1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{6},$$

$$D(X) = \left(-1 + \frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(0 + \frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(1 + \frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{29}{36},$$

$$\therefore \text{随机变量 } Y = 2X + 1,$$

$$\therefore X \text{ 的数学期望 } EX = -\frac{1}{6}; Y \text{ 的方差 } DY = 4D(X) = \frac{29}{9}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{1}{6}, \frac{29}{9}.$$

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的方差

11. 已知随机变量 X 的方差 $D(X) = m$ ，设 $Y = 3X + 2$ ，则 $D(Y) = ()$.

A. $9m$

B. $3m$

C. m

D. $3m + 2$

【答案】 A

【解析】 $\because D(X) = m,$

$$\therefore D(Y) = D(3X + 2) = 3^2 D(X)$$

$$= 9D(X)$$

$$= 9m.$$

故选A .

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的分布列

12. 随机变量 ξ 的取值为 $0, 1, 2$ ，若 $P(\xi = 0) = \frac{1}{5}$ ， $E(\xi) = 1$ ，则 $D(\xi) = ()$.

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. 1

【答案】 B

【解析】 设 $P(\xi = 1) = p$ ，则 $\because P(\xi = 0) = \frac{1}{5}$ ， $\therefore P(\xi = 2) = \frac{4}{5} - p$ ，

$$\therefore \text{期望 } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{5} + p + 2\left(\frac{4}{5} - p\right) = \frac{8}{5} - p = 1, \text{ 解得: } p = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \text{方差 } D(\xi) = \frac{1}{5} \times (0 - 1)^2 + \frac{3}{5} \times (1 - 1)^2 + \frac{1}{5} \times (2 - 1)^2 = \frac{2}{5}.$$

【标注】【知识点】离散型随机变量的方差；离散型随机变量的数学期望

13. 已知随机变量 X 的分布列如下表所示，则 $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

X	-2	0	8
p	$\frac{1}{2}$	m	$\frac{1}{4}$

【答案】17

【解析】 $\frac{1}{2} + m + \frac{1}{4} = 1$ ，得 $m = \frac{1}{4}$ ，
 $\therefore E(X) = -2 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{4} = 1$ ，
 $\therefore D(X) = (-2-1)^2 \times \frac{1}{2} + (0-1)^2 \times \frac{1}{4} + (8-1)^2 \times \frac{1}{4} = 17$.
故答案为：17 .

【标注】【知识点】离散型随机变量的方差

14. 某篮球队规定，在一轮训练中，每人最多可投篮4次，一旦投中即停止该轮训练，否则一直试投到第四次为止 . 已知一个投手的投篮命中概率为 $\frac{3}{4}$.

(1) 求该选手投篮3次停止该轮训练的概率 .

(2) 求一轮训练中，该选手的实际投篮次数 ξ 的概率分布和数学期望 .

【答案】(1) $\frac{3}{64}$.

(2) ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$

$$E(\xi) = \frac{85}{64} .$$

【解析】(1) 该选手投篮3次停止该轮训练即第三次投中事件为 A ，

$$\text{概率为 } P(A) = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64} .$$

(2) 由题意 ξ 的可能取值为1、2、3、4，

$$P(\xi = 1) = \frac{3}{4} ,$$

$$P(\xi = 2) = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} ,$$

$$P(\xi = 3) = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64} ,$$

$$P(\xi = 4) = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} + \left(1 - \frac{3}{4}\right)^4 = \frac{1}{64} ,$$

∴ ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$

$$E(\xi) = 1 \times \frac{3}{4} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{3}{64} + 4 \times \frac{1}{64} = \frac{85}{64} .$$

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望

二、常见分布列

1. 两点分布

如果随机变量 X 的分布列为

X	0	1
P	$1 - p$	p

其中 $0 < p < 1$ ，则称离散型随机变量 X 服从参数为 p 的两点分布，并且称 $p = P(X = 1)$ 为成功概率。

若随机变量 X 服从参数为 p 的两点分布，则 $E(X) = p$ ， $D(X) = p(1 - p)$ 。

15. 同时抛掷两枚相同的均匀硬币，随机变量 $\xi = 1$ 表示结果中有正面向上， $\xi = 0$ 表示结果中没有正面向上，则 $E(\xi) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 0.75

【解析】 本题考查离散型随机变量的期望。

$$\begin{aligned} P(\xi = 0) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\ P(\xi = 1) &= 1 - P(\xi = 0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \\ \therefore E(\xi) &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = 0.75. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；互斥事件与对立事件

16. 袋中有红球10个，白球5个，从中摸出2个球，如果只关心摸出两个红球的情形，问如何定义随机变量 X ，才能使 X 满足两点分布，并求分布列。

【答案】

$$X = \begin{cases} 0, & \text{两球非全红} \\ 1, & \text{两球全红} \end{cases}, P(X=1) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2} = \frac{3}{7}, P(X=0) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

【解析】 从含有10个红球，5个白球的口袋中摸出2个球，其结果是随机的，可能是一红一白，两红，两白三种情况，

为此我们定义随机变量如下： $X = \begin{cases} 0, & \text{两球非全红} \\ 1, & \text{两球全红} \end{cases}$ ，

则 X 显然服从两点分布，且 $P(X=1) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2} = \frac{3}{7}$ ，

$$\therefore P(X=0) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

故答案为： $X = \begin{cases} 0, & \text{两球非全红} \\ 1, & \text{两球全红} \end{cases}, P(X=1) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2} = \frac{3}{7}$ ，

$$P(X=0) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

【标注】【知识点】两点分布

17. 在篮球比赛中，罚球命中1次得1分，不中得0分．如果运动员甲罚球命中的概率是0.8，记运动员甲罚球1次的得分为 X ，则 $E(X)$ 等于（ ）．

A. 0.2

B. 0.4

C. 0.8

D. 1

【答案】 C

【解析】 由题意得 x 的取值范围为0.1， $P(X=0) = 1 - 0.8 = 0.2$ ， $P(X=1) = 0.8$ ，

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.8 = 0.8.$$

故选C．

【标注】【知识点】两点分布；离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列

18. 已知随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i=1) = p_i$ ， $P(\xi_i=0) = 1 - p_i$ ， $i=1, 2$ ．若 $0 < p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$ ，则（ ）．

A. $E(\xi_1) < E(\xi_2)$ ， $D(\xi_1) < D(\xi_2)$

B. $E(\xi_1) < E(\xi_2)$ ， $D(\xi_1) > D(\xi_2)$

C. $E(\xi_1) > E(\xi_2)$ ， $D(\xi_1) < D(\xi_2)$

D. $E(\xi_1) > E(\xi_2)$ ， $D(\xi_1) > D(\xi_2)$

【答案】 A

【解析】 方法一： $\because E(\xi_1) = p_1$ ， $E(\xi_2) = p_2$ ， $\therefore E(\xi_1) < E(\xi_2)$

$$\because D(\xi_1) = p_1(1-p_1), D(\xi_2) = p_2(1-p_2), \therefore$$

$$D(\xi_1) - D(\xi_2) = (p_1 - p_2)(1 - p_1 - p_2) < 0.$$

方法二：\$i=1\$时，\$p(\xi_1=1)=p_1, p(\xi_1=0)=1-p_1\$，

$$E(\xi_1) = p_1,$$

$$D(\xi_1) = p_1(1-p_1),$$

\$i=2\$时，\$p(\xi_2=1)=p_2, p(\xi_2=0)=1-p_2\$，

$$E(\xi_2) = p_2,$$

$$D(\xi_2) = p_2(1-p_2),$$

$$\because p_1 < p_2,$$

$$\therefore E(\xi_1) < E(\xi_2).$$

$$D(\xi_1) - D(\xi_2) = p_1(1-p_1) - p_2(1-p_2) = (p_1 - p_2)[1 - (p_1 + p_2)],$$

$$\because 0 < p_1 < p_2 < \frac{1}{2},$$

$$\therefore 1 - (p_1 + p_2) > 0,$$

$$\therefore D(\xi_1) < D(\xi_2).$$

故选A.

方法三：\$\because E(\xi_1) = 0 \times (1-p_1) + 1 \times p_1 = p_1\$，

同理，\$E(\xi_2) = p_2\$，又\$0 < p_1 < p_2\$，

$$\therefore E(\xi_1) < E(\xi_2).$$

$$D(\xi_1) = (0-p_1)^2(1-p_1) + (1-p_1)^2 \cdot p_1 = p_1 - p_1^2,$$

$$\text{同理，} D(\xi_2) = p_2 - p_2^2.$$

$$D(\xi_1) - D(\xi_2) = p_1 - p_2 - (p_1^2 - p_2^2) = (p_1 - p_2)(1 - p_1 - p_2).$$

$$\because 0 < p_1 < p_2 < \frac{1}{2},$$

$$\therefore 1 - p_1 - p_2 > 0,$$

$$\therefore (p_1 - p_2)(1 - p_1 - p_2) < 0.$$

$$\therefore D(\xi_1) < D(\xi_2).$$

故选A.

方法四：同解法一知\$E(\xi_1) < E(\xi_2)\$，\$D(\xi_1) = p_1 - p_1^2\$，\$D(\xi_2) = p_2 - p_2^2\$，

令\$f(x) = x - x^2\$，则\$f(x)\$在\$(0, \frac{1}{2})\$上为增函数，

$$\because 0 < p_1 < p_2 < \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(p_1) < f(p_2), \text{即} D(\xi_1) < D(\xi_2).$$

故选A.

【标注】【知识点】离散型随机变量的方差；离散型随机变量的数学期望

2. 超几何分布

一般地，设有总数为 N 件的两类物品，其中第一类物品有 M 件，从所有物品中任取 n 件($n \leq N$)，这 n 件中所含第一类物品的件数 X 是一个离散型随机变量，它取值为 m 时的概率为 $P(X=m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ ($0 \leq m \leq n$)，我们称离散型随机变量 X 的这种形式的概率分布为超几何分布，也称 X 服从参数为 N ， M ， n 的超几何分布。在超几何分布中，只要知道 N ， M 和 n ，就可以根据公式求出 X 取不同值时的概率 $P(X=m)$ ，从而列出 X 的分布列。

若离散型随机变量 X 服从参数为 N ， M ， n 的超几何分布，则 $E(X) = \frac{nM}{N}$ 。

19. 在8件获奖作品中，有3件一等奖，有5件二等奖，从这8件作品中任取3件。

(1) 求取出的3件作品中，一等奖多于二等奖的概率。

(2) 设 X 为取出的3件作品中一等奖的件数，求随机变量 X 的分布列和数学期望。

【答案】 (1) $\frac{2}{7}$ 。

(2) X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$\therefore EX = \frac{9}{8}。$$

【解析】 (1) 设 A 为事件“取出的3件产品中，一等奖多于二等奖”，

$$\text{依题意，则有 } P(A) = \frac{C_3^2 C_5^1 + C_3^3 C_5^0}{C_8^3} = \frac{15 + 1}{56} = \frac{2}{7}，$$

$\therefore$ 取出的3件作品中，一等奖多于二等奖的概率为 $\frac{2}{7}$ 。

(2) 随机变量 X 的所有可能取值为0, 1, 2, 3，

$$P(X=0) = \frac{C_3^0 C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}，$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_5^2}{C_8^3} = \frac{15}{28}，$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}，$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3 C_5^0}{C_8^3} = \frac{1}{56}，$$

$\therefore$ 随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$\therefore EX = 0 \times \frac{5}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{9}{8}。$$

【标注】【知识点】超几何分布

20. 甲、乙两人参加某种选拔测试. 在备选的10道题中, 甲答对其中每道题的概率都是 $\frac{3}{5}$, 乙能答对其中的5道题. 规定每次考试都从备选的10道题中随机抽出3道题进行测试, 答对一题加10分, 答错一题 (不答视为答错) 减5分, 至少得15分才能入选.

- (1) 求乙得分的分布列和数学期望;
(2) 求甲、乙两人中至少有一人入选的概率.

【答案】(1) 乙得分的分布列如下:

X	-15	0	15	30
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$EX = \frac{15}{2}.$$

$$(2) P = \frac{103}{125}.$$

【解析】(1) 设乙大题所得分数为 X ,

则 X 的可能取值为-15, 0, 15, 30.

$$P(X = -15) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{12};$$

$$P(X = 0) = \frac{C_5^2 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{5}{12};$$

$$P(X = 15) = \frac{C_5^1 C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{5}{12};$$

$$P(X = 30) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{12}.$$

乙得分的分布列如下:

X	-15	0	15	30
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$EX = \frac{1}{12} \times (-15) + \frac{5}{12} \times 0 + \frac{5}{12} \times 15 + \frac{1}{12} \times 30 = \frac{15}{2}.$$

(2) 由已知甲、乙至少答对2题才能入选, 记甲入选为事件 A , 乙入选为事件 B .

$$P(A) = C_3^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{81}{125},$$

$$P(B) = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{故甲乙两人至少有一人入选的概率 } P = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 1 - \frac{44}{125} \times \frac{1}{2} = \frac{103}{125}.$$

【标注】【知识点】超几何分布

21.

为推动乒乓球运动的发展，某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加，现有来自甲协会的运动员3名，其中种子选手2名；乙协会的运动员5名，其中种子选手3名，从这8名运动员中随机选择4人参加比赛．

(1) 设 A 为事件“选出的4人中恰有2名种子选手，且这2名种子选手来自同一个协会”，求事件 A 发生的概率．

(2) 设 X 为选出的4人中种子选手的人数，求随机变量 X 的分布列和数学期望．

【答案】 (1) $\frac{6}{35}$.

(2)

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

$$E(X) = \frac{5}{2} .$$

【解析】 (1) 由已知， $P(A) = \frac{C_2^2 \cdot C_3^2 + C_3^2 \cdot C_2^2}{C_8^4} = \frac{6}{35}$ ，
所以事件 A 发生的概率为 $\frac{6}{35}$.

(2) 随机变量 X 的所有可能取值为 1, 2, 3, 4，

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^3}{C_8^4} = \frac{1}{14} ,$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 \cdot C_3^2}{C_8^4} = \frac{3}{7} ,$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3 \cdot C_3^1}{C_8^4} = \frac{3}{7} ,$$

$$P(X=4) = \frac{C_5^4 \cdot C_3^0}{C_8^4} = \frac{1}{14} ,$$

所以随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

$$E(X) = \frac{5}{2} .$$

【标注】【知识点】超几何分布

22. 端午节吃粽子是我国的传统习俗，设一盘中装有9个粽子，其中豆沙粽2个，枣粽3个，白粽4个，这三种粽子的外观完全相同，从中任意选取3个．

(1) 设 A 为事件“三种粽子各取到1个”，求事件 A 发生的概率．

(2) 设随机变量 X 表示取到的枣粽个数，求 X 的分布列与数学期望．

【答案】 (1) $\frac{2}{7}$.

(2) 分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

$$EX = 1.$$

【解析】(1) 令 A 表示事件“三种粽子各取到1个”，则由古典概型的概率公式有：

$$P(A) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1}{C_9^3} = \frac{2}{7}.$$

(2) 随机变量 X 的取值为 0, 1, 2, 3 个，则

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{5}{21}, \\ P(X=1) &= \frac{C_3^1 C_6^2}{C_9^3} = \frac{15}{28}, \\ P(X=2) &= \frac{C_3^2 C_6^1}{C_9^3} = \frac{3}{14}, \\ P(X=3) &= \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84}, \end{aligned}$$

∴ 分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

$$EX = 0 \times \frac{5}{21} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{14} + 3 \times \frac{1}{84} = 1.$$

【标注】【知识点】古典概型的概率计算（涉及计数原理）；离散型随机变量的分布列

23. 甲、乙两人参加某种选拔测试．规定每人必须从备选的6道题中随机抽出3道题进行测试，在备选的6道题中，甲答对其中每道题的概率都是 $\frac{3}{5}$ ，乙只能答对其中的3道题．答对一题加10分，答错一题（不答视为答错）得0分．

(1) 求乙得分的分布列和数学期望．

(2) 规定：每个人至少得20分才能通过测试，求甲、乙两人中至少有一人通过测试的概率．

【答案】(1) 分布列为：

X	0	10	20	30
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$EX = 15.$$

$$(2) \frac{103}{125}.$$

【解析】(1) 设乙的得分为 X ， X 的可能值有 0, 10, 20, 30，

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}, \quad P(X=10) = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20},$$

$$P(X=20) = \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20}, \quad P(X=30) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20},$$

乙得分的分布列为：

X	0	10	20	30
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$EX = 0 \times \frac{1}{20} + 10 \times \frac{9}{20} + 20 \times \frac{9}{20} + 30 \times \frac{1}{20} = 15,$$

所以乙得分的数学期望为15.

(2) 乙通过测试的概率为 $\frac{1}{20} + \frac{9}{20} = \frac{1}{2}$,

$$\text{甲通过测试的概率为 } \left(\frac{3}{5}\right)^3 + C_3^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{81}{125},$$

甲、乙都没通过测试的概率为：

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{81}{125}\right) = \frac{22}{125}.$$

$$\text{因此甲、乙两人中至少有一人通过测试的概率为 } 1 - \frac{22}{125} = \frac{103}{125}.$$

【标注】【知识点】相互独立事件的概率乘法公式；离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列

24. 一个袋子中装有大小形状完全相同的编号分别为1, 2, 3, 4, 5的5个红球与编号分别为1, 2, 3, 4的4个白球，从中任意取出3个球.

(1) 求取出的3个球颜色相同且编号是三个连续整数的概率.

(2) 求取出的3个球中恰有2个球编号相同的概率.

(3) 记 ξ 为取出3个球中编号的最大值，求 ξ 的分布列与数学期望.

【答案】 (1) $\frac{5}{84}$.

(2) $\frac{1}{3}$.

(3) ξ 的分布列为：

ξ	2	3	4	5
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$

$$E(\xi) = \frac{85}{21}.$$

【解析】 (1) 设“取出的3个球颜色相同且编号是三个连续整数”为事件A,

$$\text{则 } P(A) = \frac{3+2}{C_9^3} = \frac{5}{84}.$$

(2) 设取出的3个球“恰有两个球编号相同”为事件B,

$$P(B) = \frac{4 \times C_7^1}{C_9^3} = \frac{1}{3}.$$

(3) ξ 的可能值为2, 3, 4, 5,

$$P(\xi = 2) = \frac{C_2^1 C_2^2 + C_2^2 C_2^1}{C_9^3} = \frac{1}{21},$$

$$P(\xi = 3) = \frac{C_2^1 C_4^2 + C_2^2 C_4^1}{C_9^3} = \frac{4}{21},$$

$$P(\xi = 4) = \frac{C_2^1 C_6^2 + C_2^2 C_6^1}{C_9^3} = \frac{3}{7},$$

$$P(\xi = 5) = \frac{C_1^1 C_8^2}{C_9^3} = \frac{1}{3},$$

$\therefore \xi$ 的分布列为：

ξ	2	3	4	5
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$

$$\therefore E(\xi) = 2 \times \frac{1}{21} + 3 \times \frac{4}{21} + 4 \times \frac{3}{7} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{85}{21}.$$

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列

3. 二项分布

独立重复试验是指在相同条件下可重复进行的，各次之间相互独立的一种试验，在这种试验中每一次试验只有两种结果，即要么发生，要么不发生，且任何一次试验发生的概率都是一样的。

在 n 次独立重复试验中，用 X 表示事件 A 发生的次数，设每次试验中事件 A 发生的概率为 p ，则

$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ，其中 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ，此时称随机变量 X 服从二项分布，记为

$X \sim B(n, p)$ ，并称 p 为成功概率。

若 $X \sim B(n, p)$ ，则 $E(X) = np$ ， $D(X) = np(1-p)$ 。

【温馨提示】

①两点分布中的随机变量取值只有两个：0和1，二项分布中的随机变量取值分别为0, 1, 2, 3, $\dots$, n ；两点分布中的随机试验中的试验次数只有一次，谈不上独立重复试验，而二项分布中的试验次数是独立重复试验，试验次数一般大于或等于一次。

②有放回抽样时，每次抽取时的总体没有改变，因而每次抽到某物的概率都是相同的，可以看成是独立重复试验，此种抽样为**二项分布**模型。而不放回抽样时，取出一个则总体就少一个，因此每次抽到某物的概率是不同的，此种抽样为**超几何分布**模型。因此二项分布与超几何分布模型最主要的区别在于**有放回抽样还是不放回抽样**。

25. 已知随机变量 X 服从二项分布，且 $E(X) = 2.4$ ， $D(x) = 1.44$ ，则二项式的参数 n ， p 的值为（ ）。

A. $n = 4, p = 0.6$

B. $n = 6, p = 0.4$

C. $n = 8, p = 0.3$

D. $n = 24, p = 0.1$

【答案】 B**【解析】** $X \sim B(n, p)$,

$$\begin{cases} E(X) = np = 2.4 \\ D(X) = np(1-p) = 1.44 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} n = 6 \\ p = 0.4 \end{cases}.$$

故选B.

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的方差； n 次独立重复试验与二项分布

26. 一款击鼓小游戏的规则如下：每盘游戏都需击鼓三次，每次击鼓要么出现一次音乐，要么不出现音乐；每盘游戏击鼓三次后，出现一次音乐获得10分，出现两次音乐获得20分，出现三次音乐获得100分，没有出现音乐则扣除200分（即获得-200分）. 设每次击鼓出现音乐的概率为 $\frac{1}{2}$ ，且各次击鼓出现音乐相互独立.

(1) 设每盘游戏获得的分数为 X ，求 X 的分布列.

(2) 玩三盘游戏，至少有一盘出现音乐的概率是多少？

【答案】 (1)

X	10	20	100	-200
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(2) $\frac{511}{512}$.**【解析】** (1) X 可能的取值为10, 20, 100, -200. 根据题意，有

$$P(X = 10) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

$$P(X = 20) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8},$$

$$P(X = 100) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8},$$

$$P(X = -200) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

以 X 的分布列为：

X	10	20	100	-200
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(2) 设“第 i 盘游戏没有出现音乐”为事件 $A_i (i = 1, 2, 3)$ ，则

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(X = -200) = \frac{1}{8},$$

所以“三盘游戏中至少有一盘出现音乐”的概率为

$$1 - P(A_1 A_2 A_3) = 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{511}{512}.$$

因此，玩三盘游戏至少有一盘出现音乐的概率是 $\frac{511}{512}$.

【标注】【知识点】n次独立重复试验与二项分布

27. 某校设计了一个实验考察方案：考生从6道备选题中随机抽取3道题，按照题目要求独立完成全部实验操作，规定：至少正确完成其中的2道题便可通过，已知6道备选题中考生甲有4道能正确完成，2道题不能完成：考生乙每题正确完成的概率都是 $\frac{2}{3}$ ，且每题正确完成与否互不影响 .
- (1) 求甲、乙两考生正确完成题数的概率分布列和甲、乙两考生的数学期望 .
- (2) 请分析比较甲、乙两考生的实验操作能力 .

【答案】 (1) X, Y 的分布列和数学期望分别为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$E(X) = 2,$$

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$E(Y) = 2.$$

(2) 甲能力强 .

【解析】 (1) 设甲、乙各能完成 X, Y 道，

$$X = 1, 2, 3;$$

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5},$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5},$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5},$$

$$Y = 0, 1, 2, 3,$$

$$P(Y = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

$$P(Y = 1) = C_3^1 \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9},$$

$$P(Y = 2) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(Y=3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

$\therefore X, Y$ 的分布列和数学期望分别为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$E(X) = \frac{1}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} = 2,$$

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$E(Y) = \frac{2}{9} + \frac{8}{9} + \frac{8}{9} = 2.$$

(2) ① $E(X) = E(Y)$ ，水平相当，

$$\textcircled{2} D(X) = \frac{2}{5}, D(Y) = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > D(X), \therefore \text{甲更稳定},$$

$$\textcircled{3} P(X \geq 2) = \frac{4}{5} = \frac{20}{25}, P(Y \geq 2) = \frac{20}{27} < P(X \geq 2), \therefore \text{甲更易通过},$$

综上，甲能力强。

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列

28. 某次知识竞赛规则如下：在主办方预设的固定顺序的5个问题中，选手若能正确回答出三个问题，即停止答题，晋级下一轮；否则不能晋级。假设某选手正确回答每个问题的概率都是 $\frac{2}{3}$ ，且每个问题回答的正确与否都相互独立。

(1) 设“该选手连续答对三道题晋级下一轮”为事件 A ，求事件 A 发生的概率。

(2) 记该选手在本轮中答对问题的个数为随机变量 ξ ，求随机变量 ξ 的分布列和期望。

【答案】 (1) $\frac{104}{243}$ 。

(2) 随机变量 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{64}{81}$

$$\text{期望 } E(\xi) = \frac{74}{27}.$$

【解析】 (1) $P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{104}{243}.$

(2) $\xi = 0, 1, 2, 3,$

$$P(\xi=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243},$$

$$P(\xi=1) = C_5^1 \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{10}{243},$$

$$P(\xi=2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{243},$$

$$P(\xi = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + C_3^1 \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{192}{243} = \frac{64}{81},$$

∴ 随机变量 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{64}{81}$

$$\text{期望 } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{243} + 1 \times \frac{10}{243} + 2 \times \frac{40}{243} + 3 \times \frac{64}{81} = \frac{74}{27}.$$

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列；相互独立事件的概率乘法公式

29. 高二某班4名同学期末考完试后，商量购买一些学习参考书准备在高三时使用，大家约定：每个人通过掷一枚质地均匀的骰子决定自己去哪购买，掷出点数大于或等于5的人去图书批发市场购买，掷出点数小于5的人去网上购买，且参加者必须从图书批发市场和网上选择一家购买。

(1) 求这4人中至多有1人去图书批发市场购买的概率。

(2) 用 ξ 、 η 分别表示这4人去图书批发市场和网上购买的人数，记 $X = \xi \cdot \eta$ ，求随机变量 X 的分布列和数学期望 $E(X)$ 。

【答案】 (1) $\frac{16}{27}$ 。

(2) x 的分布列为：

x	0	3	4
P	$\frac{17}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{24}{81}$

$$E(x) = \frac{8}{3}.$$

【解析】 (1) 依题意，这4个人中，每个人去图书批发市场的概率为 $\frac{1}{3}$ ，

去网上购买的概率为 $\frac{2}{3}$ ，

设“这4个人中恰有 i 个人去图书批发市场购买”为事件 $A_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ ，

$$P(A_i) = C_4^i \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{4-i}, \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4),$$

这4个人中至多有1人去图书批发市场购买的概率为：

$$\begin{aligned} P &= P(A_0) + P(A_1) \\ &= C_4^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \frac{16}{27}. \end{aligned}$$

(2) 由已知得 x 的所有可能取值为 0, 3, 4，

$$\begin{aligned} P(x = 0) &= P(A_0) + P(A_4) \\ &= C_4^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + C_4^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \end{aligned}$$

$$= \frac{17}{81},$$

$$P(x=3) = P(A_1) + P(A_3)$$

$$= C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^3 + C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{40}{81},$$

$$P(x=4) = P(A_2)$$

$$= C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{24}{81},$$

∴ x 的分布列为：

x	0	3	4
P	$\frac{17}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{24}{81}$

$$E(x) = 0 \times \frac{17}{81} + 3 \times \frac{40}{81} + 4 \times \frac{24}{81}$$

$$= \frac{8}{3}.$$

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列； n 次独立重复试验与二项分布；离散型随机变量的数学期望

30. 乒乓球单打比赛在甲乙两名运动员间进行，比赛采取7局4胜制（即先胜4局者获胜，比赛结束），假设两人在每一局比赛中获胜的可能性相同。
- （1）求甲以4比1获胜的概率。
- （2）求乙获胜且比赛局数多于5局的概率。
- （3）求比赛局数的分布列和数学期望。

【答案】（1） $\frac{1}{8}$
 （2） $\frac{5}{16}$
 （3） $\frac{93}{16}$

【解析】（1） $P_{4:1} = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$

（2）①乙以4：2胜出：

$$P_1 = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32},$$

乙以4：3胜出：

$$P_2 = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32},$$

$$\therefore P = P_1 + P_2 = \frac{5}{16}.$$

(3)	X	4	5	6	7
	P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$

$$P_{(X=4)} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8},$$

$$P_{(X=5)} = 2 \times C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P_{(X=6)} = 2 \times C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16},$$

$$P_{(X=7)} = 2 \times C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16},$$

$$\therefore E(X) = 4 \times \frac{1}{8} + 5 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{5}{16} + 7 \times \frac{5}{16} = \frac{93}{16}.$$

【标注】【知识点】n次独立重复试验与二项分布

31. 某居民小区有两个相互独立的安全防范系统（简称系统） A 和 B ，系统 A 和 B 在任意时刻发生故障的概率分别为 $\frac{1}{10}$ 和 $\frac{1}{5}$ 。

（1）求在任意时刻至少有一个系统不发生故障的概率。

（2）设系统 A 在3次相互独立的检测中不发生故障的次数为随机变量 ξ ，求 ξ 的概率分布列及数学期望 $E\xi$ 。（用数字作答）

【答案】（1） $\frac{49}{50}$ 。

（2） ξ 的概率分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{729}{1000}$

$$E\xi = \frac{27}{10}.$$

【解析】（1）设系统 A 发生故障的概率为 P_A ，系统 B 发生故障的概率为 P_B ，

则至少有一个系统不发生故障的概率

$$P = 1 - P_A P_B = 1 - \frac{1}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{49}{50}.$$

（2）由题意得 $P(\xi = 0) = C_3^0 \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$ ，

$$P(\xi = 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{27}{1000},$$

$$P(\xi = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right)^2 = \frac{243}{1000},$$

$$P(\xi = 3) = C_3^3 \left(1 - \frac{1}{10}\right)^3 = \frac{729}{1000}.$$

所以 ξ 的概率分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{729}{1000}$

P	$\frac{1}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{729}{1000}$
-----	------------------	-------------------	--------------------	--------------------

$$E\xi = 3 \times \frac{9}{10} = \frac{27}{10} .$$

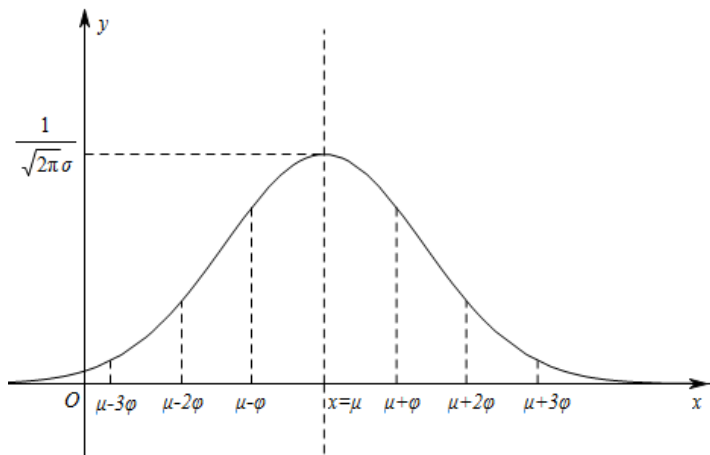
【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列；离散型随机变量的数学期望；相互独立事件的概率乘法公式

4. 正态分布

正态分布概念

如果随机变量 ξ 的概率密度函数为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ($x \in (-\infty, +\infty)$, 实数 μ 和 σ ($\sigma > 0$)为参数), 称 ξ 服从参数为 μ, σ 的正态分布, 用 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 表示. $f(x)$ 的表达式可简记为 $N(\mu, \sigma^2)$, 它的密度曲线简称为正态曲线.

若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 ξ 的期望与方差分别为 $E(\xi) = \mu$, $D(\xi) = \sigma^2$.



如果随机变量 ξ 的概率函数为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, 则称 ξ 服从标准正态分布, 即 $\xi \sim N(0, 1)$.

正态总体在三个特殊区间内取值的概率值:

- ① $P(\mu - \sigma < x \leq \mu + \sigma) = 0.6826$;
- ② $P(\mu - 2\sigma < x \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$;
- ③ $P(\mu - 3\sigma < x \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$.

正态分布的概率问题的求解方法

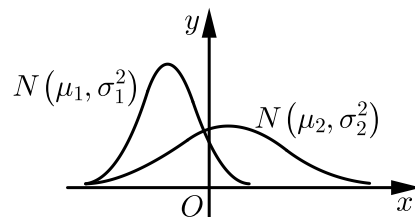
利用正态曲线的对称性求概率是正态分布的基本题型, 解题的关键是利用对称轴 $x = \mu$ 确定所求概率对应的随机变量取值区间与已知概率对应的随机变量取值区间的关系, 必要时, 可借助图形判断. 对于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 有:

- ① 对任意的实数 a , $P(X < \mu - a) = P(X > \mu + a)$;

$$\textcircled{2} P(X < x_0) = 1 - P(X \geq x_0);$$

$$\textcircled{3} P(a < X < b) = P(x < b) - P(x \leq a).$$

32. 设两个正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ($\sigma_1 > 0$) 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ($\sigma_2 > 0$) 的密度函数图像如图所示. 则有 ().



A. $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$

B. $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$

C. $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$

D. $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$

【答案】 A

【解析】 从题意, 可知两个正态分布的均值 $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$, 所以选A.

【标注】 【知识点】 正态分布

33. 设随机变量 $X \sim N(1, 5^2)$, 且 $P(X \leq 0) = P(X \geq a - 2)$, 则实数 a 的值为 ____.

【答案】 4

【解析】 $X \sim N(1, 5^2)$

则 $\mu = 1, \delta = 5$;

$$P(X \leq 0) = P\left(\frac{X-1}{5} \leq \frac{-1}{5}\right),$$

$$P(X \geq a-2) = P\left(\frac{X-1}{5} \geq \frac{a-3}{5}\right),$$

由对称性知 $-\frac{1}{5} + \frac{a-3}{5} = 0$ 则 $a = 4$.

故答案为: 4.

【标注】 【知识点】 正态分布

34. 若随机变量 $\xi \sim N(2, 1)$, 且 $P(\xi \geq 1) = 0.8413$, $P(\xi \geq 3) =$ ____.

【答案】 0.1587

【解析】 $P(\xi \geq 3) = P(\xi \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$.

【标注】【知识点】正态分布

35. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(3, \sigma^2)$, 且 $P(2 \leq X \leq 4) = 0.6826$, 则 $P(X > 4) = (\quad)$.

A. 0.1588

B. 0.1587

C. 0.1586

D. 0.1585

【答案】 B

【解析】 $\because X \sim N(3, \sigma^2)$,

$$\therefore \bar{X} = 3 .$$

$$P(X > 4) = \frac{1}{2}(1 - P(2 \leq X \leq 4)) = 0.1587 .$$

【标注】【知识点】正态分布

36. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 如果 $P(X \leq 1) = 0.8413$, 则 $P(-1 < X < 0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0.3413

【解析】 $P(X > 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$, $P(-1 < X < 1) = 1 - 2 \times 0.1587 = 0.6826$,

$$P(-1 < X < 0) = \frac{0.6826}{2} = 0.3413 .$$

【标注】【知识点】正态分布

三、 其它分布

37. 某同学通过选拔考试进入学校的“体育队”和“文艺队”, 进入这两个队成功与否是相互独立的, 能同时进入这两个队的概率是 $\frac{1}{24}$, 至少能进入一个队的概率是 $\frac{3}{8}$, 并且能进入“体育队”的概率小于能进入“文艺队”的概率 .

(1) 求该同学通过选拔进入“体育队”的概率 p_1 和进入“文艺队”的概率 p_2 .

(2) 学校对于进入“体育队”的同学增加2个选修课学分, 对于进入“文艺队”的同学增加1个选修课学分, 求该同学获得选修课加分分数 X 的分布列与数学期望 .

【答案】 (1) $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{4}$.

(2) X 的分布列 :

--	--	--	--	--

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$

$$E(X) = \frac{7}{12}.$$

【解析】(1) ∵某同学通过选拔考试进入学校的“体育队”和“文艺队”，

进入这两个队成功与否是相互独立的，能同时进入这两个队的概率是 $\frac{1}{24}$ ，至少能进入一个队的概率是 $\frac{3}{8}$ ，

并且能进入“体育队”的概率小于能进入“文艺队”的概率．

该同学通过选拔进入“体育队”的概率 p_1 和进入“文艺队”的概率 p_2 ，

$$\therefore \begin{cases} p_1 p_2 = \frac{1}{24} \\ p_1 + p_2 - p_1 p_2 = \frac{3}{8} \\ p_1 < p_2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{4}.$$

(2) 依题意随机变量 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3，

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8},$$

$$P(X=1) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{5}{24},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24},$$

∴ X 的分布列：

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{8} + 1 \times \frac{5}{24} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{24} = \frac{7}{12}.$$

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望

38. 一个盒子里装有7张卡片，其中有红色卡片4张编号分别为1, 2, 3, 4，白色卡片3张编号分别为2, 3, 4，从盒子里任取4张卡片（假设取到任何一张卡片的可能性相同）．

(1) 求取出的4张卡片中，含有编号为3的卡片的概率．

(2) 在取出的4张卡片中，红色卡片编号最大值设为 X ，求随机变量 X 的分布列和数学期望．

【答案】(1) $\frac{6}{7}$ ．

(2) 分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

随机变量 X 的数学期望 $EX = \frac{17}{5}$.

【解析】(1) 设“取出的4张卡片中, 含有编号为3的卡片”为事件 A , 则

$$P(A) = \frac{C_2^1 C_5^3 + C_2^2 C_5^2}{C_7^4} = \frac{6}{7} .$$

(2) 随机变量 X 的所有可能取值为 $1, 2, 3, 4$.

$$P(X=1) = \frac{C_3^3}{C_7^4} = \frac{1}{35}, \quad P(X=2) = \frac{C_4^3}{C_7^4} = \frac{4}{35},$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3}{C_7^4} = \frac{2}{7}, \quad P(X=4) = \frac{C_6^3}{C_7^4} = \frac{4}{7} .$$

所以 X 的分布列为:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

$$\text{随机变量 } X \text{ 的数学期望 } EX = 1 \times \frac{1}{35} + 2 \times \frac{4}{35} + 3 \times \frac{2}{7} + 4 \times \frac{4}{7} = \frac{17}{5} .$$

【标注】【知识点】超几何分布

39. 甲、乙两人进行某项对抗性游戏, 采用“七局四胜”制, 即先赢四局者为胜, 若甲、乙两人水平相当, 且已知甲先赢了前两局.

(1) 求乙取胜的概率.

(2) 记比赛局数为 X , 求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

【答案】(1) $\frac{3}{16}$.

(2) $\frac{11}{2}$.

【解析】(1) 乙取胜有两种情况.

一是乙连胜四局, 其概率 $P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$;

二是第三到第六局中乙胜三局, 第七局乙胜, 其概率为

$$P_2 = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$\text{所以乙胜概率 } P_1 + P_2 = \frac{3}{16} .$$

(2) 由题意知 $X = 4, 5, 6, 7$,

$$P(X=4) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};$$

$$P(X=5) = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$P(X=6) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$P(X=7) = \frac{1}{4},$$

∴其分布列为

X	4	5	6	7
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$EX = 4 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{4} + 7 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{2}.$$

【标注】【知识点】相互独立事件的概率乘法公式；离散型随机变量的分布列；离散型随机变量的数学期望

40. 某校要求学生在高中三年级选修3门课程，其中1门人文科学，2门自然科学，已知某学生通过人文科学课程的概率是 $\frac{4}{5}$ ，通过自然科学课程的概率是 $\frac{3}{4}$ ，且各门课程通过与否相互独立。

(1) 求该学生只通过人文科学课程但没有通过自然科学课程的概率。

(2) 用 ξ 表示该学生所选的3门课程通过的门数，求随机变量 ξ 的概率分布列。

【答案】(1) $\frac{1}{20}$ 。

(2) ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{33}{80}$	$\frac{9}{20}$

$$E(x) = \frac{23}{10}.$$

【解析】(1) 记“该同学只通过人文科学课程但没有通过自然科学课程”为事件A，

$$\text{则 } P(A) = \frac{4}{5} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{20},$$

所以该同学只通过人文科学课程但没有通过自然科学课程的概率为 $\frac{1}{20}$ 。

(2) 随机变量 ξ 的所有可能取值为0, 1, 2, 3,

$$\text{则 } P(\xi=0) = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{80},$$

$$P(\xi=1) = \frac{4}{5} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times C_2^1 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8},$$

$$P(\xi=2) = \frac{4}{5} \times C_2^1 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{3}{4} + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{33}{80},$$

$$P(\xi=3) = \frac{4}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{20},$$

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{33}{80}$	$\frac{9}{20}$

$$E(x) = 0 \times \frac{1}{80} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{33}{80} + 3 \times \frac{9}{20} = \frac{23}{10}.$$

【标注】【知识点】互斥事件的概率加法公式；相互独立事件的概率乘法公式；离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列