

不等式综合

一、填空题

1. 设 $x + 3y = 2$, 则 $z = 3^x + 27^y$ 的最小值是 _____ .
2. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $4x + 2y - xy = 0$, 则 $x + y$ 的最小值为 _____ .
3. 已知 $b > 2a > 0$, 求 $b^2 + \frac{1}{a(b-2a)}$ 的最小值为 _____ .
4. 设 $a + b = 2, b > 0$, 则 $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b}$ 的最小值为 _____ .
5. 函数 $y = a^{1-x} (a > 0, a \neq 1)$ 的图象恒过定点 A , 若点 A 在直线 $mx + ny - 1 = 0 (mn > 0)$ 上, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 _____ .
6. 已知正数 a, b 满足 $a + b = 2$, 则 $\frac{1}{a+1} + \frac{4}{b+1}$ 的最小值为 _____ .
7. 若正实数 a, b 满足 $(2a + b)^2 = 1 + 6ab$, 则 $\frac{ab}{2a + b + 1}$ 的最大值为 _____ .
8. 若正数 x, y 满足 $x + 2y = 4xy$, 则 $x + \frac{y}{2}$ 的最小值为 _____ .

二、解答题

9. 解关于 x 的不等式:
 - (1) $x^2 + ax + 4 > 0 (a \in \mathbf{R})$.
 - (2) $x^2 - (a + 2)x + 2a > 0$.
10. $f(x)$ 时定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且函数在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 若不等式 $f(ax^2 + x + 1) \leq f(1)$ 对任意的 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.
11. 已知不等式 $mx^2 - (m + 1)x + 1 > 0$.
 - (1) 当 $m = 3$ 时解此不等式.
 - (2) 若对于任意的实数 $x \in (-2, -1)$, 此不等式恒成立, 求实数 m 的取值范围.
12. 已知函数 $f(x) = |x| + 2|x - a| (a > 0)$
 - (1) 当 $a = 1$ 时, 解不等式 $f(x) \leq 4$.
 - (2) 若不等 $f(x) \geq 4$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

13. 已知函数 $f(x) = |x - 1|$.

(1) 解不等式 $f(x) \geq 1$.

(2) 存在实数 x , 使不等式 $f(x) + |x + 2| - m \leq 0$ 有解 , 求实数 m 的取值范围 .