

不等式综合

一轮整合计划

🔔 数列求和：倒序相加法（加法型）

如果一个数列 $\{a_n\}$ ，与首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一常数，那么求这个数列的前 n 项和即可用_____，如等差数列的前 n 项和即是用此法推导的。

🔔 数列求和：错位相减法（减法型）

如果一个数列的各项是由一个_____和一个_____的对应项之_____构成的，那么这个数列的前 n 项和即可用此法来求，如等比数列的前 n 项和就是用此法推导的。

🔔 数列求和：裂项相消法（除法型）

把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而求得其和。

常见的拆项公式有：_____

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$$

$$n \cdot n! = (n+1)! - n!;$$

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

🔔 数列求和：分组求和法（乘法型）

有一类数列，既不是等差数列，也不是等比数列，若将这类数列适当拆开，可分为几个等差、等比或常见的数列，即先_____，然后_____，形如： $\{a_n + b_n\}$ ，其中 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列。

🔔 数列求和：并项求和法（括号型）

一个数列的前 n 项和中，则两两结合求解，则称之为_____，形如：求

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - \dots - 99^2 + 100^2.$$

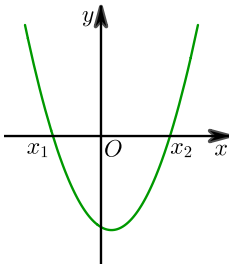
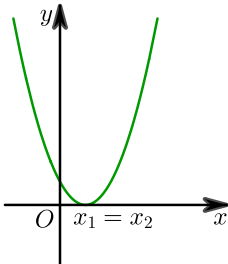
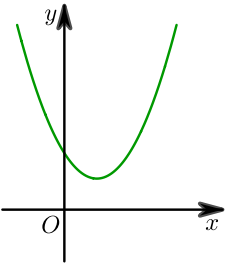
一、不等式与含参不等式

1. 一元二次不等式的解法

(1)三个“二次”之间的关系

由一元二次不等式的一般形式知，任何一个一元二次不等式整理成一般形式为

$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 或 $ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ ，而且我们已经知道对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ ，其中 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，它的解按照 $\Delta > 0$ ， $\Delta = 0$ ， $\Delta < 0$ 可分为三种情况。相应地，二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象与 x 轴的位置关系也分为三种情况，因此，对应的一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ (或 < 0) ($a > 0$) 的解集我们也分三种情况进行讨论。

		$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象				
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的根		有两不同实根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等的实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	无实根
	$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x x \neq -\frac{b}{2a}\}$	$\mathbb{R}$
	$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x x_1 < x < x_2\}$	π	π

(2)解一元二次不等式的一般步骤

- ①对不等式变形，使一端为零且二次项系数大于零；
- ②计算判别式 Δ ；
- ③当 $\Delta \geq 0$ 时，求出相应的一元二次方程的根；
- ④根据二次函数图象写出一元二次不等式的解集.

1. 函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域为 ().

- A. $(-4, -1)$
B. $(-4, 1)$
C. $(-1, 1)$
D. $(-1, 1]$

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$, 集合 $B = \{x | |2x - 1| > 3\}$, 则集合 $A \cap B = (\quad)$.

- A. $\{x|2 \leq x \leq 3\}$ B. $\{x|2 \leq x < 3\}$

C. $\{x|2 < x \leq 3\}$

D. $\{x|-1 < x < 3\}$

3. 不等式 $x^2 - 3x + 2 < 0$ 的解集是 () .

A. $(-\infty, 1)$

B. $(2, +\infty)$

C. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

D. $(1, 2)$

2. 分式不等式的解法

(1) 概念

分母中含有未知数的不等式叫做分式不等式. 各种分式不等式经过同解变形, 都可化为标准形式

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 (\geq 0) \text{ 或 } \frac{f(x)}{g(x)} < 0 (\leq 0) \text{ (其中 } f(x), g(x) \text{ 为整式且 } g(x) \text{ 不为 } 0).$$

(2) 分式不等式的解法

解分式不等式的思路——转化为整式不等式来解.

化分式不等式为标准形式的方法: 移项, 通分, 右边化为0, 左边化为 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的形式.

将分式不等式转化为整式不等式(组)求解如下:

分式	不等式同解变形1	同解变形2
$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$f(x)g(x) > 0$
$\frac{f(x)}{g(x)} < 0$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$f(x)g(x) < 0$
$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x)g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$
$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x)g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$

【易错提示】

分式不等式 $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ (或 ≤ 0) 与不等 $f(x)g(x) \geq 0$ (或 ≤ 0) 不是同解不等式, 将分式不等式转化为整式不等式后, 应注意分子可取零, 而分母不能取零.4. 不等式 $\frac{x-1}{2x+1} \geq 0$ 的解集为 () .

A. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right]$

B. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup [1, +\infty)$

D. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

5. 不等式 $\frac{2-x}{x+4} > 1$ 的解集是 () .

- A. $\{x | -4 < x < 2\}$
- B. $\{x | x < -1\}$
- C. $\{x | -4 < x < -1\}$
- D. $\{x | x < -4 \text{ 或 } x > 1\}$

6. 不等式 $\frac{x-1}{2x+1} \leq 0$ 的解集为 () .

- A. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right]$
- B. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$
- C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup [1, +\infty)$
- D. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

3. 高次不等式的解法

(1)概念

最高次项的次数高于二次的不等式称为高次不等式

(2)解法步骤：穿根法(穿针引线法)

①**化形**：将不等式化为一端为0，另一端为一次因式或二次不可约因式的积的形式，并使每个因式最高次项的系数为正；

②**求根，标根**：求出各因式对应方程的根，并在数轴上从小到大依次标出，注意点的虚实；

③**画曲线**：从数轴的最右端上方起，自右至左依次经过各个点(根)画曲线，注意遇奇次重根一次穿过数轴，遇偶次重根穿而不过；

④**写解集**：记数轴上方为正，下方为负，根据不等号的方向，写出不等式的解集.

【注意】

在用穿针引线法求解一元高次不等式的过程中要注意：

(1)区间端点能否取到；

(2)各因式中的最高次项系数必须为正.

7. 不等式 $\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3} \leq 0$ 的解集为 _____ .

8. 解不等式 $\frac{(x+1)^3(x+2)^2}{x-3} > 0$

4. 利用函数单调性解不等式

对于能够判断单调性的函数，可将所给的不等式转化为相同结构式后利用函数单调性化简不等式，

进而求解.

9. 不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-8} > 3^{-2x}$ 的解集是 _____ .
10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$, 则满足不等式 $f(1-x^2) > f(2x)$ 的 x 的取值范围是 _____ .
11. 已知 $a > 0, a \neq 1$, 解不等式 $\log_a(4+3x-x^2) - \log_a(2x-1) > \log_a 2$.
12. 不等式 $\sqrt{4x-x^2} < x$ 的解集是 () .
- A. $(0, 2)$
B. $(2, +\infty)$
C. $(2, 4]$
D. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
13. 不等式 $\sqrt{2x^2+1} - x \leq 1$ 的解集是 _____ .

5. 绝对值不等式

14. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $|x+2| + |x-1| \leq 5$ ”是“ $-2 \leq x \leq 3$ ”的 () .
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
15. 不等式 $|x-1| - |x-5| < 2$ 的解集是 () .
- A. $(-\infty, 4)$
B. $(-\infty, 1)$
C. $(1, 4)$
D. $(1, 5)$
16. 不等式 $\left|\frac{x}{2-x}\right| > \frac{x}{2-x}$ 的解集是 () .
- A. $\{x|0 < x < 2\}$
B. $\{x|x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$
C. $\{x|x < 0\}$
D. $\{x|x > 2\}$

6. 含参不等式的解法

在解含有参数的一元二次不等式时, 往往要对参数进行分类讨论, 为了做到分类“不重不漏”, 一般从如下三个方面进行考虑:

- (1) 关于不等式类型的讨论: 二次项的系数 $a > 0, a = 0, a < 0$.
(2) 关于不等式对应的方程的根的讨论: 两根 ($\Delta \geq 0$), 无根 ($\Delta < 0$);
(3) 关于不等式对应的方程根的大小的讨论: $x_1 > x_2, x_1 = x_2, x_1 < x_2$.

17. 已知不等式 $x^2 - ax - b < 0$ 的解集为 $(2, 3)$, 则不等式 $bx^2 - ax - 1 > 0$ 的解集为 _____ .
18. 解关于 x 的不等式: $x^2 - (2+a)x + 2a < 0$.

19. 解关于 x 的不等式 $ax^2 - (2a + 1)x + 2 < 0$.

20. 已知关于 x 的不等式 $(m - 3)x^2 - (m - 2)x + 1 > 0$.

解关于 x 的不等式 $(m - 3)x^2 - (m - 2)x + 1 > 0$.

二、基本不等式

1. 定义

(1)重要不等式

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in R$), 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

(2)基本不等式

如果 $a > 0, b > 0$, 那么 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

其中 $\frac{a+b}{2}$, 叫做正数 a, b 的算术平均数, $\sqrt{ab}$ 叫做正数 a, b 的几何平均数.

因此, 基本不等式可以叙述为: 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

从数列的角度来看, 如果把 $\frac{a+b}{2}$ 看作正数 a, b 的2等差中项, $\sqrt{ab}$ 看作正数 a, b 的等比中项, 那么基本不等式可以叙述为: 两个正数的等差中项不小于它们的等比中项.

【温馨提示】

①基本不等式成立的条件是 $a > 0, b > 0$.

②从不等式成立的条件来看, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 要求 $a > 0, b > 0$, 而 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 对 a, b 没有要求. 例如, 当 $a = -2, b = -3$ 时, $(-2)^2 + (-3)^2 \geq 2 \times (-2) \times (-3)$ 成立, 但 $\sqrt{(-2) \times (-3)} \leq \frac{(-2) + (-3)}{2}$ 显然不成立.

③事实上, 当 $a > 0, b > 0$ 时, 我们分别用 $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ 代替重要不等式中的 a, b , 可得 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 变形可得 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

④基本不等式可变形为 $a + b \geq 2\sqrt{ab}, ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 等.

⑤由基本不等式, 我们可以得到一个常用结论: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ ($ab > 0$).

2. 基本不等式使用条件

(1)利用基本不等式求最值的条件

利用基本不等式求最值, 必须同时满足以下三个条件: 一正、二定、三相等

即: ① x, y 都是正数.

②积 xy (或和 $x + y$)为定值(有时需通过“配凑、拆分”找出定值).

③ x 与 y 必须能够相等(等号能够取到).

特别地, 当式子中等号不成立时, 不能应用基本不等式, 而应改用函数的单调性求最值.

(2)构造定值条件的常用技巧

①加项变换; ②拆项变换; ③统一换元; ④平方后利用基本不等式.

(3)基本不等式与最值

设 x, y 是正数, ①若 $x + y = S$ (和为定值), 则当 $x = y$ 时, 积 $x \cdot y$ 取得最大值 $\frac{S^2}{4}$;

②若 $x \cdot y = P$ (积为定值), 则当 $x = y$ 时, 和 $x + y$ 取得最小值 $2\sqrt{P}$.

3. 不等式链

若 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立. 其中 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ 和 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 分别叫做 a, b 的调和平均数和平方平均数.

【温馨提示】

上述不等式链内涵丰富, 在实际的运用中相对于基本不等式更为广泛, 但它们都是在基本不等式的基础上拓展而来的, 也都可以由基本不等式(重要不等式)加以证明. 一般来说, 以下四组不等式可以作为基本不等式(重要不等式)的应用形态:

- ① $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} (a > 0, b > 0);$
- ② $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{a+b} (a > 0, b > 0);$
- ③ $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 (ab > 0);$
- ④ $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (a, b \in \mathbf{R}).$

4. 常见题型

🔗 定义法

- 21. 已知正数 x, y 满足 $xy = 1$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为 ____ .
- 22. 设 $x > 0, y > 0$, 且 $xy - (x + y) = 1$, 则 $x + y$ 的最小值为 ____ .
- 23. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + 2b = 8$, 那么 ab 的最大值等于 ().
A. 4 B. 8 C. 16 D. 32
- 24. 已知 $0 < x < 1$, 则 $\sqrt{x(1-x)}$ 的最大值是 ____ .
- 25. 若 $a, b \in \mathbf{R}, ab > 0$, 则 $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab}$ 的最小值为 ____ .

🔗 “1”的利用

26. 若 $a, b > 0$, 且满足 $2a + b = 3$, 则 $-\frac{1}{a} - \frac{2}{b}$ 的最大值为 _____ .

27. 已知正数 x, y 满足 $x + 2y = 2$, 则 $\frac{1}{y} + \frac{8}{x}$ 的最小值为 _____ .

28. 若正数 x, y 满足 $x + 3y = 5xy$, 则 $3x + 4y$ 的最小值是 () .

A. $\frac{24}{5}$

B. $\frac{28}{5}$

C. 5

D. 6

29. 已知 $x > 0, y > 0, x + y = 1$, 则 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)$ 的最小值为 _____ .

🔔 加减常数

30. 设 $x > 2$, 则 $y = x + \frac{4}{x-2}$ 的最小值是 _____, 此时 $x =$ _____ .

31. 求解:

已知 $x < \frac{5}{4}$, 求函数 $y = 4x - 2 + \frac{1}{4x-5}$ 的最大值 .

32. 已知 $x < \frac{3}{2}$, 则函数 $f(x) = 2x + \frac{4}{2x-3}$ 的值域是 _____ .

🔔 二次比一次

33. $y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}$ 的最小值 _____, 此时 $x =$ _____ .

34. 设 $x < 1$, 则 $\frac{x^2-x+1}{x-1}$ 的值域为 _____ .

35. 已知 x, y 均为正实数, 且 $x + y = 16$, 则 $\frac{xy}{9x+y}$ 的最大值为 _____ .

🔔 一次比二次

36. 解答下列问题:

函数 $y = \frac{x}{x^2+2x+4}$ 的值域是 _____ .

🔔 二次比二次

37. 函数 $y = \frac{x^2+x+4}{x^2+4}$ 的值域是 _____ .

🔔 二消一 (消元)

38. 若正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为 () .

A. 1

B. 6

C. 9

D. 16

39. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为 _____ .

40.

已知 $a > 0, b > 1$ 且 $a + b = 2$, 则 $\frac{a^2 + 3}{a} + \frac{b^2 + 2}{b - 1}$ 的最小值为 _____ .

💡 换元法

41. 设 x, y 是正实数, 且 $x + y = 1$, 则 $\frac{x^2}{x + 2} + \frac{y^2}{y + 1}$ 的最小值是 _____ .

42. 已知 $a, b, c > 0$, 求 $\frac{a + 3c}{a + 2b + c} + \frac{4b}{a + b + 2c} - \frac{8c}{a + b + 3c}$ 的最小值 .

💡 拆补结合

43. 已知 $a > b > 0$, 则 $2a + \frac{3}{a + b} + \frac{2}{a - b}$ 的最小值为 _____ .

44. 已知正实数 a, b 满足 $a > b$, 且 $ab = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{4a^2 + b^2 + 1}{2a - b}$ 的最小值为 _____ .

45. 已知正数 a, b 满足 $a^2 + ab - 3 = 0$, 则 $4a + b$ 的最小值为 _____ .

46. 设 $a > b > 0$, 则 $a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a - b)}$ 的最小值是 _____ .

三、 不等式中的恒成立与能成立

(1) 含参数的不等式的恒成立问题

通过分离参数, 把参数的范围问题转化为函数的最值问题. 在 $f(x)$ 的最大值与最小值存在的条件下,
 $a > f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a > f(x)_{\max}$; $a < f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a < f(x)_{\min}$.

(2) 一元二次不等式的恒成立问题

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c > 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 均成立} &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ \Delta < 0; \end{cases} \\ ax^2 + bx + c < 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 均成立} &\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ \Delta < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

② 若 $ax^2 + bx + c > 0$ (或 < 0) ($a \neq 0$) 在 $x \in [x_1, x_2]$ 时恒成立, 可利用单调性或分离参数法等求解.

(3) 含参数的不等式的能成立问题

通过分离参数, 把参数的范围问题转化为函数的最值问题. 在 $f(x)$ 的最大值与最小值存在的条件下,
 $a > f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a > f(x)_{\min}$; $a < f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a < f(x)_{\max}$.

47. 不等式 $ax^2 + ax + 1 \geq 0$ 对一切实数恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $0 < a < 4$

B. $0 \leq a < 4$

C. $0 < a \leq 4$

D. $0 \leq a \leq 4$

48. 不等式 $(a - 3)x^2 < (4a - 2)x$ 对 $a \in (0, 1)$ 恒成立, 则 x 的取值范围是 _____ .

49. 不等式 $|x+3| - |x-1| \leq a^2 - 3a$ 对任意实数 x 恒成立, 则实数 a 的取值范围为().
- A. $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$
 B. $[-1, 4]$
 C. $[1, 2]$
 D. $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$
50. 已知 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x}$, 对任意的 $x \in [1, +\infty)$, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.
51. 若关于 x 的不等式 $2x^2 - 8x - 4 - a > 0$ 在 $1 \leq x \leq 4$ 内有解, 则实数 a 的取值范围是().
- A. $a < -4$ B. $a > -4$ C. $a > -12$ D. $a < -12$
52. 已知函数 $f(x) = mx^2 + (1 - 3m)x - 4$, $m \in \mathbf{R}$.
- (1) 当 $m = 1$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值.
- (2) 解关于 x 的不等式 $f(x) > -1$.
- (3) 当 $m < 0$ 时, 若存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_0) > 0$, 求 m 的取值范围.
53. 设函数 $f(x) = |2x + 2| - |x - 2|$.
- (1) 求不等式 $f(x) > 2$ 的解集.
- (2) 若 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq t^2 - \frac{7}{2}t$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围.