

解三角形综合

一、选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 且 $A > B$, 则一定有 () .

A. $\cos A > \cos B$

B. $\sin A > \sin B$

C. $\tan A > \tan B$

D. $\sin A < \sin B$

【答案】 B

【解析】 $A > B$, 则 $a > b$,

$$\text{由 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 得 } \sin A > \sin B.$$

故选B.

【标注】 【知识点】 正弦定理

2. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 所对边的长分别 a 、 b 、 c , 若 $b + c = 2a$, $3 \sin A = 5 \sin B$, 则角 $C =$ () .

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{5\pi}{6}$

D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】 D

【解析】 $\because 3 \sin A = 5 \sin B$, 由正弦定理可得: $3a = 5b$,

$$\therefore a = \frac{5b}{3},$$

$$\text{又 } b + c = 2a, \text{ 可得 } c = 2a - b = \frac{7b}{3},$$

不妨取 $b = 3$, 则 $a = 5$, $c = 7$.

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 3} = -\frac{1}{2},$$

$$\because C \in (0, \pi),$$

$$\therefore C = \frac{2\pi}{3}.$$

故选D.

【标注】 【知识点】 余弦定理; 正弦定理

3. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 若 $\cos A = \frac{7}{8}$, $c - a = 2$, $b = 3$, 则 $a =$ () .
- A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. $\frac{7}{2}$

【答案】 A

【解析】 由余弦定理得： $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos A$,
将 $c = 2 + a$ 代入可得： $a = 2$, 故选A .

【标注】 【知识点】 SAS类三角形（利用余弦定理）

4. 在三角形 ABC 中, $\angle A$ 的平分线为 AD , 点 D 在边 BC 上, $AD = 3$, $AC = 4$, $CD = 2$, 则 $\cos A$ 的值为 () .
- A. $\frac{27}{32}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{17}{32}$ D. $\frac{17}{32}$

【答案】 D

【解析】 在三角形 ABC 中, $\angle A$ 的平分线为 AD ,
点 D 在边 BC 上, $AD = 3$, $AC = 4$, $CD = 2$,
则 $\cos \frac{A}{2} = \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2AD \cdot AC} = \frac{9 + 16 - 4}{2 \times 3 \times 4} = \frac{7}{8}$,
 $\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 = 2 \times \frac{49}{64} - 1 = \frac{17}{32}$,
故选：D .

【标注】 【知识点】 SSS类三角形（利用余弦定理）

5. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $(a + b)(\sin A - \sin B) = (c - b) \sin C$, $\angle A =$ () .
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】 C

【解析】 已知等式 $(a + b)(\sin A - \sin B) = (c - b) \sin C$,
利用正弦定理化简得： $(a + b)(a - b) = c(c - b)$, 即 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,
 $\therefore \cos A = \frac{1}{2}$,
 $\therefore A = \frac{\pi}{3}$,

故选：C.

【标注】【知识点】边角互化（利用余弦定理）；边角互化（利用正弦定理）

【素养】数学运算

6. 在钝角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a=7, c=5, \sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积等于().
- A. $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$
C. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{15}{4}$

【答案】 C

【解析】在钝角 $\triangle ABC$ 中，

$$\because a = 7, c = 5, \sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14},$$

$\therefore A > C$, C 是锐角,

$$\text{且 } \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{11}{14},$$

由余弦定理得, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,

$$\therefore 25 = 49 + b^2 - 2 \times 7 \times b \times \frac{11}{14} ,$$

则 $b^2 - 11b + 24 = 0$,

解得 $b = 3$ 或 8 ，

$\therefore \triangle ABC$ 是钝角三角形,

∴当 $b = 8$ 时, 角 B 是钝角,

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 25 - 64}{2 \times 7 \times 5} = \frac{1}{7} > 0,$$

则 $b = 8$ 舍去，同理验证 $b = 3$ 符合条件，

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 7 \times 3 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{4},$$

故选：C.

【标注】 **【素养】** 数学运算

【知识点】SAS类三角形（利用余弦定理）；三角形面积公式

7. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a = \sqrt{5}, c = 2, \cos A = \frac{2}{3}$, 则 $b = ()$.
- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

【答案】 D

【解析】 $\because a = \sqrt{5}, c = 2, \cos A = \frac{2}{3},$
 $\therefore$ 由余弦定理可得： $\cos A = \frac{2}{3} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + 4 - 5}{2 \times b \times 2},$ 整理可得：
 $3b^2 - 8b - 3 = 0,$
解得： $b = 3$ 或 $-\frac{1}{3}$ （舍去）.
故选D.

【标注】【知识点】SSA类三角形（利用余弦定理）

8. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是内角 A, B, C 的对边， $C = 2A,$
 $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \frac{3}{2} \sin B \sin C,$ 则 $\cos C = ()$.
A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{7}{16}$
C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ D. $-\frac{7}{16}$

【答案】 A

【解析】 已知等式 $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \frac{3}{2} \sin B \sin C,$
利用正弦定理化简得： $b^2 + c^2 - a^2 = \frac{3}{2} bc,$
 $\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{3}{2} bc}{2bc} = \frac{3}{4},$
 $\because C = 2A,$
 $\therefore \cos C = \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = \frac{1}{8}.$
故选A.

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角

二、填空题

9. 在 $\triangle ABC$ 中， $AC = \sqrt{7}, BC = 2, B = 60^\circ,$ 则 $\triangle ABC$ 的面积等于_____.

【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】 设 $AB = c,$ 在 $\triangle ABC$ 中，
由余弦定理知 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B,$
即 $7 = c^2 + 4 - 2 \times 2 \times c \times \cos 60^\circ, c^2 - 2c - 3 = 0,$

又 $c > 0$, $\therefore c = 3$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B = \frac{1}{2} BC \cdot h,$$
$$\text{可知 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

故答案为: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【标注】【知识点】三角形面积公式

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A = \frac{\pi}{3}$, $AC = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + 1)$, 则内角 $B =$ _____.

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【解析】 $\because A = \frac{\pi}{3}$, $AC = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + 1) = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} AB,$$

$$\therefore \text{解得: } AB = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore \text{由余弦定理可得: } BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times (\sqrt{3} + 1) \times \frac{1}{2}} = \sqrt{6},$$

$$\therefore \text{由正弦定理可得: } \sin B = \frac{AC \sin A}{BC} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore AC < BC, B \text{ 为锐角},$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\pi}{4}.$$

【标注】【知识点】余弦定理; 正弦定理

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $2a \sin A = (2b - c) \sin B + (2c - b) \sin C$, 若 $c = \sqrt{6}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\triangle ABC$ 的周长为 _____.

【答案】 $3\sqrt{6}$

【解析】 $\because 2a \sin A = (2b - c) \sin B + (2c - b) \sin C$,

$$\therefore 2a^2 = (2b - c)b + (2c - b)c,$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}, A = \frac{\pi}{3},$$

$$S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore b = \sqrt{6}, \text{ 又 } c = \sqrt{6},$$

$$\therefore a = \sqrt{6},$$

$$\therefore \text{周长为 } 3\sqrt{6}.$$

$$\text{故答案为: } 3\sqrt{6}.$$

【标注】【知识点】正弦定理；余弦定理；正余弦定理综合求解边角；三角形面积公式

12. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6, \angle A = 30^\circ, \angle B = 120^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____ .

【答案】 $9\sqrt{3}$

【解析】 $\because \triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ, \angle B = 120^\circ$,

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle C \Rightarrow BC = AB = 6,$$

由面积和正弦定理公式,得

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB \sin B = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \sin 120^\circ = 9\sqrt{3}$$

即 $\triangle ABC$ 的面积为 $9\sqrt{3}$.

$$\text{故答案为: } 9\sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】正弦定理；三角形面积公式

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 设 S 为 $\triangle ABC$ 的面积, 满足

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - c^2), \text{ 则角 } C \text{ 的大小为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【解析】 $\because S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - c^2),$

$$\therefore \text{可得: } \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2ab \cos C,$$

$$\therefore \tan C = \sqrt{3},$$

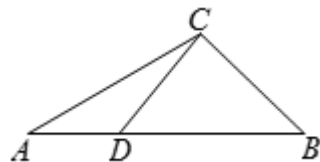
$$\because 0 < C < \pi,$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{3}.$$

【标注】【知识点】三角形面积公式

三、解答题

14. 已知如图：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle ACB = 105^\circ$ ， $AB = \sqrt{3} + 1$ ， D 是 AB 边上的点．



(1) 求 AC 的长．

(2) 若 $\triangle ACD$ 的面积是 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，求 CD 的长．

【答案】 (1) 2.

(2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

【解析】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = \pi - \angle A - \angle ACB = 45^\circ$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin B} \\ \sin 105 = \sin(60^\circ + 45^\circ) \end{cases} \text{得 } AC = 2.$$

(2) 在 $\triangle ACD$ 中， $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin A$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} \times AD,$$

$$AD = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos A = \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2AC \cdot AD}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 + \frac{3}{4} - CD^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2},$$

$$CD = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

【标注】【知识点】正弦定理；余弦定理；多个三角形拼接的解三角形问题；正余弦定理综合求解边角

15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c ，若 $c \sin A = \sqrt{3}a \cos C$ ．

(1) 求角 C 的大小．

(2) 若 $c = \sqrt{31}$ ， $a + b = 7$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积．

【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$.

(2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【解析】 (1) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 可得 $c \sin A = a \sin C$ ，

$$\therefore a \sin C = \sqrt{3}a \cos C,$$

$$\therefore \tan C = \sqrt{3},$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 由余弦定理有: } \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}, \\
 \text{即: } a^2 + b^2 - 31 &= ab, \therefore (a+b)^2 - 31 = 3ab, \\
 \text{即 } 7^2 - 31 &= 3ab, \\
 \therefore ab &= 6, \\
 \therefore S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】SSA类三角形（利用余弦定理）

16. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $2(\tan A + \tan B) = \frac{\tan A}{\cos B} + \frac{\tan B}{\cos A}$ 。

(1) 证明： $a + b = 2c$ 。

(2) 求 $\cos C$ 的最小值。

【答案】(1) 证明见解析。

$$(2) \frac{1}{2}.$$

【解析】(1) 由题意知

$$2\left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}\right) = \frac{\sin A}{\cos A \cos B} + \frac{\sin B}{\cos A \cos B},$$

$$\text{化简得 } 2(\sin A \cos B + \sin B \cos A) = \sin A + \sin B,$$

$$\text{即 } 2\sin(A+B) = \sin A + \sin B.$$

$$\text{因为 } A+B+C=\pi, \text{ 所以 } \sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C,$$

$$\text{从而 } \sin A + \sin B = 2\sin C,$$

$$\text{由正弦定理得 } a + b = 2c.$$

(2) 方法一：由(1)知 $a + b = 2c$ ，

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4c^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4c^2 - 2ab, \text{ 且 } 4c^2 \geq 4ab, \text{ 当且仅当 } a = b \text{ 时取等号}.$$

$$\text{又 } a, b > 0,$$

$$\therefore \frac{c^2}{ab} \geq 1,$$

$$\therefore \text{由余弦定理, } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3c^2 - 2ab}{2ab} = \frac{3}{2} \cdot \frac{c^2}{ab} - 1 \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos C \text{ 的最小值为 } \frac{1}{2}.$$

$$\text{方法二：由(1)知 } c = \frac{a+b}{2},$$

$$\text{所以 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{2ab}$$

$$= \frac{3}{8} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2},$$

$$\text{当且仅当 } a = b \text{ 时, 等号成立,}$$

故 $\cos C$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】求角相关的最值或范围问题；边角互化（利用正弦定理）；SSS类三角形（利用余弦定理）

17. 已知函数 $f(x) = (\sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x) \cos \omega x - \frac{1}{2} (x \in \mathbf{R}, \omega > 0)$. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 4π .

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c 满足 $(2a - c) \cos B = b \cos C$, 求函数 $f(A)$ 的取值范围.

【答案】 (1) $\left[4k\pi - \frac{4\pi}{3}, 4k\pi + \frac{2\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$.
(2) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

【解析】 (1) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\omega x) + \frac{1}{2} \cos(2\omega x)$
 $= \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right),$
 $\therefore 4\pi = \frac{2\pi}{2\omega},$ 解得 $\omega = \frac{1}{4},$
 $\therefore f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right),$
由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$
解得 $4k\pi - \frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbf{Z}.$
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[4k\pi - \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} + 4k\pi\right], k \in \mathbf{Z}.$

(2) $(2a - c) \cos B = b \cos C,$
 $\therefore (2 \sin A - \sin C) \cos B = \sin B \cos C,$
 $\therefore 2 \sin A \cos B = \sin(B + C) = \sin A,$
 $\sin A \neq 0,$
 $\therefore \cos B = \frac{1}{2}, B \in (0, \pi),$
 $\therefore B = \frac{\pi}{3},$
函数 $f(A) = \sin\left(\frac{1}{2}A + \frac{\pi}{6}\right),$
 $\therefore A \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{1}{2}A + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right),$
 $\therefore f(A) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$

【标注】【知识点】正弦定理；正弦函数的图象和性质；正弦型函数的图象与性质

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 已知 $A \neq \frac{\pi}{2}$, 且

$$3 \sin A \cos B + \frac{1}{2} b \sin 2A = 3 \sin C.$$

(1) 求 a 的值.

(2) 若 $A = \frac{2\pi}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

【答案】 (1) $a = 3$.

(2) $3 + 2\sqrt{3}$.

【解析】 (1) 由 $3 \sin A \cos B + \frac{1}{2} b \sin 2A = 3 \sin C$,

$$\text{得 } 3 \sin A \cos B + b \sin A \cos A = 3 \sin C,$$

$$\text{由正弦定理, 得 } 3a \cos B + ab \cos A = 3c,$$

$$\text{由余弦定理, 得 } 3a \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + ab \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 3c,$$

$$\text{整理得 } (b^2 + c^2 - a^2)(a - 3) = 0, \text{ 因为 } A \neq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } b^2 + c^2 - a^2 \neq 0, \text{ 所以 } a = 3.$$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{2\pi}{3}$, $a = 3$,

$$\text{由余弦定理得, } 9 = b^2 + c^2 + bc,$$

$$\text{因为 } b^2 + c^2 + bc = (b + c)^2 - bc \geq (b + c)^2 - \left(\frac{b + c}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}(b + c)^2,$$

$$\text{所以 } \frac{3}{4}(b + c)^2 \leq 9, \text{ 即 } (b + c)^2 \leq 12, \text{ 所以 } b + c \leq 2\sqrt{3},$$

$$\text{当且仅当 } b = c = \sqrt{3} \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\text{故当 } b = c = \sqrt{3} \text{ 时, } \triangle ABC \text{ 周长的最大值 } 3 + 2\sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】求边长相关最值或范围问题

19. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R = \sqrt{2}$ 且满足

$$\frac{\cos C}{\cos B} = \frac{2 \sin A - \sin C}{\sin B}.$$

(1) 求角 B 和边 b 的大小.

(2) 若 $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) $B = 60^\circ$, $b = \sqrt{6}$.

(2) $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$.

【解析】 (1) 由已知 $\frac{\cos C}{\cos B} = \frac{2 \sin A - \sin C}{\sin B}$,

$$\text{整理得, } \sin B \cos C + \cos B \sin C = 2 \sin A \cos B,$$

$$\text{即 } \sin(B + C) = 2 \sin A \cos B,$$

$$\because A + B + C = 180^\circ,$$

$$\therefore \sin(B + C) = \sin A,$$

$$\therefore \sin A = 2 \sin A \cos B,$$

$$\text{又} \because \sin A \neq 0,$$

$$\therefore \cos B = \frac{1}{2},$$

$$\therefore B = 60^\circ,$$

$$\therefore R = \sqrt{2}, b = 2R \sin B = 2\sqrt{2} \sin 60^\circ = \sqrt{6},$$

$$\therefore B = 60^\circ, b = \sqrt{6}.$$

$$(2) \text{ 由余弦定理, 得: } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$\text{即: } 6 = a^2 + 2^2 - 2a \times 2 \cos 60^\circ,$$

$$\text{解得: } a = 1 + \sqrt{3}, a = 1 - \sqrt{3}, (\text{舍})$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times (1 + \sqrt{3}) \times 2 \times \sin 60^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}.$$

【标注】【知识点】诱导公式；利用诱导公式化简；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦；正余弦定理综合求解边角；正弦定理；三角形面积公式；余弦定理

20. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边，且 $3 \cos A \cos C (\tan A \tan C - 1) = 1$ 。

(1) 求 $\sin\left(2B - \frac{5\pi}{6}\right)$ 的值。

(2) 若 $a + c = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ， $b = \sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

【答案】 (1) $\frac{7 - 4\sqrt{6}}{18}$ 。
(2) $\frac{15\sqrt{2}}{32}$ 。

【解析】 (1) $3 \cos A \cos C (\tan A \tan C - 1) = 1$
 $3 \cos A \cos C \left(\frac{\sin A \sin C}{\cos A \cos C} - 1 \right) = 1$

$$3(\tan A \tan C - \cos A \cos C) = 1$$

$$\cos(A + C) = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore \cos B - \cos(A + C) = \frac{1}{3},$$

$$\text{又} \because 0 < B < \pi,$$

$$\therefore \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \cos 2B = 1 - 2\sin^2 B = -\frac{7}{9},$$

$$\therefore \sin\left(2B - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin 2B \cos \frac{5\pi}{6} - \cos 2B \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{9} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{7}{9}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{7-4\sqrt{6}}{18}.$$

$$(2) \text{ 由余弦定理 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{(a+c)^2 - 2ac - b^2}{2ac} = \frac{1}{3},$$

$$\text{又} \because a+c = \frac{3\sqrt{3}}{2}, b = \sqrt{3},$$

$$\therefore ac = \frac{45}{32},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times \frac{45}{32} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{15\sqrt{2}}{32}.$$

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；余弦定理；三角形面积公式；半角公式；二倍角的正弦；两角和与差的正弦