

三角函数综合

一轮整合计划

周期性对称性之间的关系

“两轴两心四轴心”.

即：有两条竖直对称轴的函数，_____为其一个周期；

有两个同一高度的对称中心的函数，_____为其一个周期；

既有一条竖直对称轴，又有一个对称中心的函数，_____为其一个周期.

自对称与互对称的联系与区别

二者从形式上有很多相似之处，例如 $y = f(x)$ 和 $y = f(-x)$ 关于 y 轴对称，同时 $f(x) = f(-x)$ 的函数关于 y 轴对称.

但， $f(x) = f(2a - x)$ 和 $f(a + x) = f(a - x)$ 都说明函数 $y = f(x)$ 关于直线_____对称；

而 $y = f(x)$ 与 $y = f(2a - x)$ 关于直线 $x = a$ 对称， $f(a + x)$ 和 $f(a - x)$ 是关于直线_____对称！

零点存在定理的内容和注意事项

一般地，如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有_____，那么，函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点，即存在 $c \in (a, b)$ ，使得 $f(c) = 0$.

注意事项：①此为_____条件，也即函数不满足以上条件，仍可能有零点；

②如果函数在区间上具有单调性，则“有零点”可强化为“恰有一个零点”.

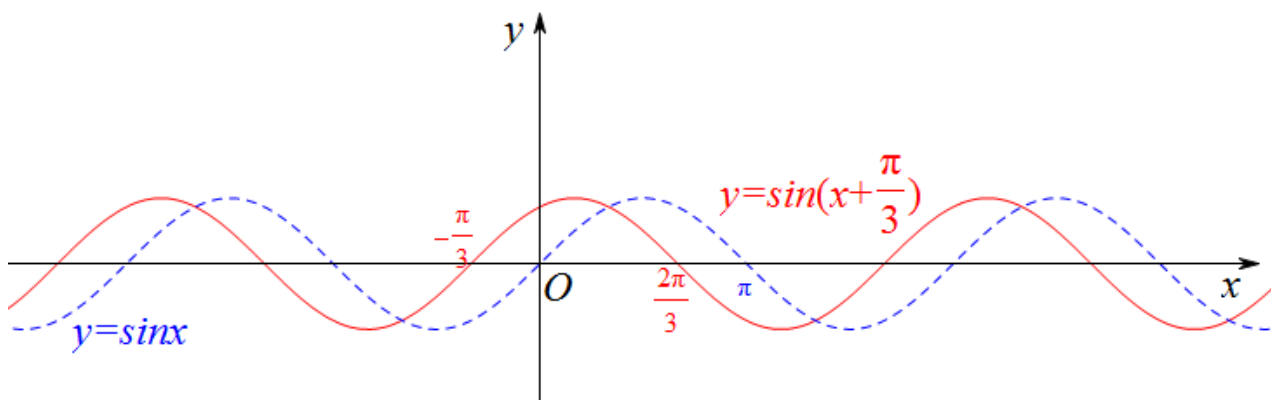
一、与三角函数零点有关的参数求解

1. 三个参数对正弦型函数的图像的影响

φ 对 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图像的影响

函数 $y = \sin(x + \varphi)$ ($\varphi \neq 0$) 的图像，可以看作是 把 $y = \sin x$ 图像上的各点向左 ($\varphi > 0$) 或向右 ($\varphi < 0$) 平移 $|\varphi|$ 个单位而得到的. (可简记为“左 + 右 -”)

如下图中的 $y = \sin x \rightarrow y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$:



【补充说明】

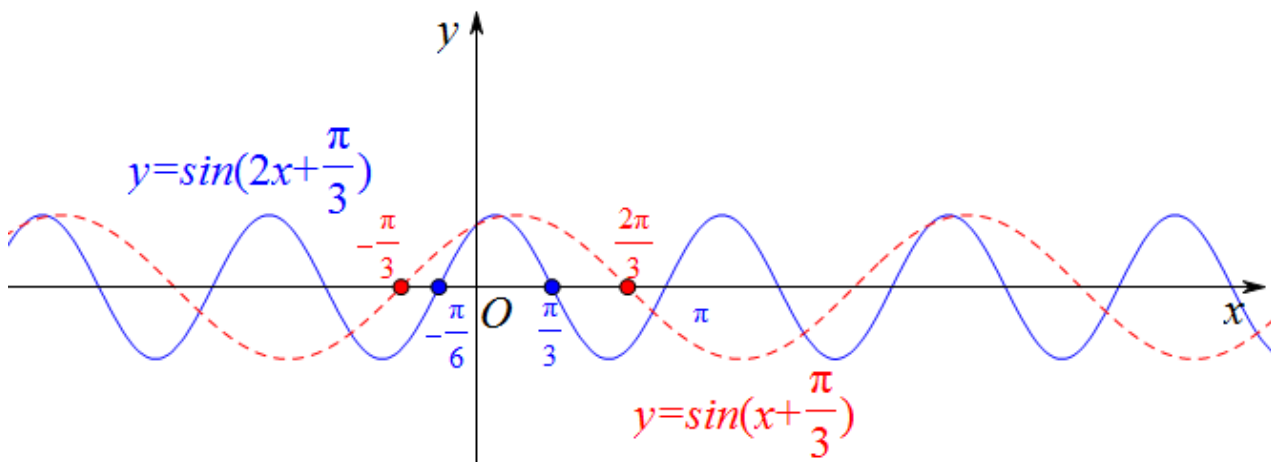
(1) $y = \sin(x + \varphi)$ 的图像与 $y = \sin x$ 的图像形状是完全一样的，二者可以通过左右平移变换得到，称此变换为平移变换或相位变换；更一般的结论：任何平移变换均不会改变图像的形状。

(2) 左右平移是针对自变量 x 本身而言的，因此如果 x 有一系列诸如负号或者系数的前缀，应该将其提取之后再行左右平移。

🕒 ω 对 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像的影响

函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$ 且 $\omega \neq 1$) 的图像，可以看作是把 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图像上各点的横坐标都缩短 ($\omega > 1$) 或伸长 ($0 < \omega < 1$) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变) 而得到的。

如下图中的 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \rightarrow y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$:



【补充说明】

(1) 由上面的变换发现， ω 可以控制变化函数的“胖瘦”，进而影响函数的周期。

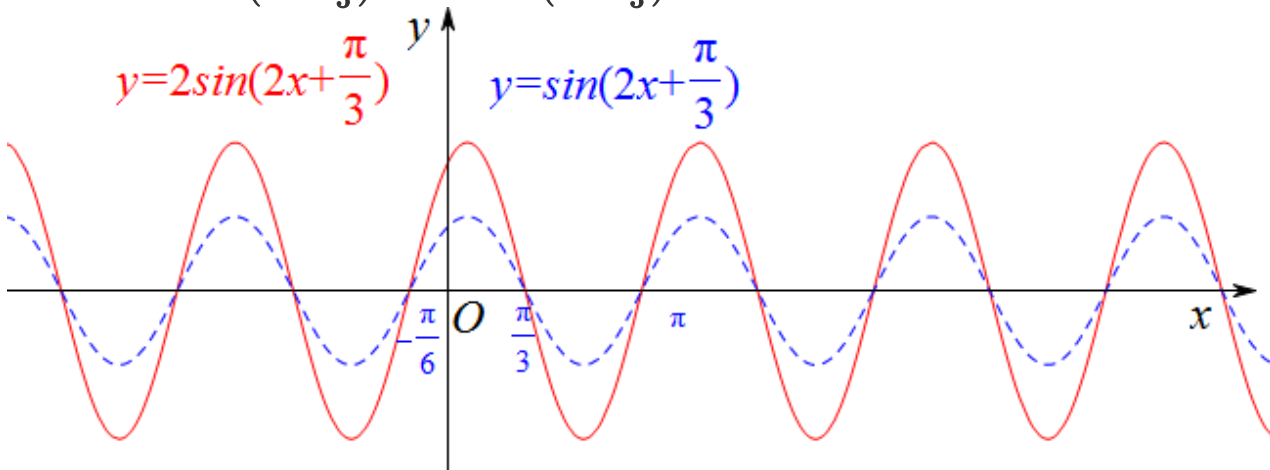
(2) $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像与 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图像的形状不同，此种变换为横向伸缩变换，也称周期变换。

(3) 推广到一般结论：函数 $f(\omega x)$ ($\omega > 0$ 且 $\omega \neq 1$) 的图像，可以看作是把函数 $f(x)$ 的图像上的点的横坐标缩短 (当 $\omega > 1$ 时) 或伸长 (当 $0 < \omega < 1$ 时) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变) 而得到。

🗣️ $A(A > 0)$ 对 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像的影响

函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$ 且 $A \neq 1$) 的图像, 可以看作是 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像上各点的纵坐标都伸长 ($A > 1$) 或缩短 ($0 < A < 1$) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 而得到的.

如下图中的 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$:



【补充说明】

- (1) 由上面的变化发现, A 可以控制函数的“高矮”, 进而影响函数的振幅.
- (2) 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的值域是 $[-|A|, |A|]$.
- (3) $|A|$ 的大小, 反映了曲线纵向波动幅度的大小.
- (4) $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像与 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像形状不同, 此种变换称为纵向伸缩变换, 也叫振幅变换.
- (5) 推广到一般结论: 函数 $y = Af(x)$ ($A > 0$ 且 $A \neq 1$) 的图像, 可以看作是函数 $y = f(x)$ 的图像上的点的纵坐标伸长 ($A > 1$) 或缩短 ($0 < A < 1$) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 而得到.
- (6) 若 $A < 0$, 此时将系数化正有两种处理方法: ①通过一步翻折变换 (参看必修一《函数的图像》一讲) 将 $f(x) \rightarrow -f(x)$ ②利用诱导公式 $-\sin x = \sin[x \pm (2k+1)\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 将系数化正, 如 $-3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + \pi\right) = 3 \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$. 系数化正后再实施振幅变换.

2. 函数零点的概念

对于函数 $y = f(x)$, 我们把使 $f(x) = 0$ 的实数 x 的值叫做函数 $y = f(x)$ 的零点.

由函数零点的概念可知, 函数 $y = f(x)$ 的零点就是方程 $f(x) = 0$ 的实数根, 也就是函数 $y = f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标.

由函数零点的概念可知, 函数 $y = f(x)$ 的零点就是方程 $f(x) = 0$ 的实数根, 也就是函数 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴交点的横坐标. 因此有:

方程 $f(x) = 0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 有零点.

1.

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 的图象相邻的两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ ，若将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 后得到偶函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $f(x)$ 的一个单调递减区间为 () .

- A. $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$
 B. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\right]$
 C. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$
 D. $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$

2. 若函数 $f(x) = 2\cos 2x + a\sin x - 4$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内的图像恒在 x 轴下方，则 a 的取值范围为 () .

- A. $a \geq \sqrt{3}$ B. $a \leq \sqrt{3}$
 C. $(-\infty, 4\sqrt{2})$ D. $-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$

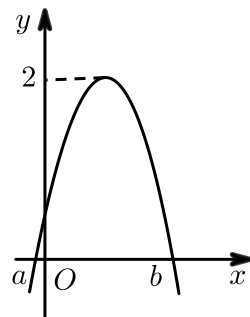
3. 若函数 $f(x) = \left| \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right) \right|$ ($\omega > 1$) 在区间 $\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递减，则实数 ω 的取值范围是 _____ .

4. 已知函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ ，若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上有最大值，无最小值，则 ω 的最大值为 () .

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{28}{9}$ C. $\frac{52}{9}$ D. $\frac{100}{9}$

5. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，满足 $f(2-x) + f(x) = 0$ ，且当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ，函数 $g(x) = f(x) + 2\sin \pi x$ 在区间 $(-3, 5)$ 上的所有零点之和为 _____ .

6. 已知函数 $f(x) = A\sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, A > 0$) 部分图象如图所示，且 $f(a) = f(b) = 0$ ，对不同的 $x_1, x_2 \in [a, b]$ ，若 $f(x_1) = f(x_2)$ ，有 $f(x_1 + x_2) = 1$ ，则 () .



- A. $\varphi = \frac{\pi}{3}$ B. $\varphi = \frac{\pi}{6}$
 C. $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ D. $\varphi = -\frac{\pi}{6}$

7. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的零点构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列，把函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象．关于函数 $g(x)$ ，下列说法正确的是 () .

- A. 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数
 B. 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

C. 函数 $g(x)$ 是偶函数

D. 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$

8. 已知函数 $f(x) = (1 - 2\cos^2 x) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - 2\sin x \cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ($|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$) 在 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{6}\right]$

上单调递增, 且 $f\left(\frac{\pi}{8}\right) \leq m$, 则实数 m 的取值范围为 ().

A. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$

B. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

C. $[1, +\infty)$

D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

9. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若对满足

$|f(x_1) - g(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$, 则 $\varphi =$ ().

A. $\frac{5\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

10. 设函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $\omega > 0$, $|\varphi| < \pi$. 若 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2$, $f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$, 且

$f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 则 ().

A. $\omega = \frac{2}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{12}$

B. $\omega = \frac{2}{3}$, $\varphi = -\frac{11\pi}{12}$

C. $\omega = \frac{1}{3}$, $\varphi = -\frac{11\pi}{24}$

D. $\omega = \frac{1}{3}$, $\varphi = \frac{7\pi}{24}$

11. 已知 $P\left(\frac{\pi}{12}, 1\right)$, $Q\left(\frac{5\pi}{12}, -1\right)$ 分别是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 图象上相邻的最高点和最低点, 则 $\omega\varphi =$ _____.

12. 函数 $f(x) = |\tan x| - \cos x$ 的定义域为 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, 则其值域为 _____.

函数 $y = \sin(x + \varphi)$ ($\varphi \neq 0$) 的图像可以看做将函数 $y = \sin x$ 的图像上的所有的点向左 (当 $\varphi > 0$ 时) 或向右 (当 $\varphi < 0$ 时) 平移 $|\varphi|$ 个单位而得到.

13. 已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$, $x \in \mathbf{R}$), 若函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 ().

A. $\left(0, \frac{5}{12}\right]$

B. $\left(0, \frac{5}{6}\right)$

C. $\left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right]$

D. $\left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left(\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right]$

14. 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 是常数, $A > 0, \omega > 0$). $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为_____.
15. 设常数 a 使方程 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = a$ 在闭区间 $[0, 2\pi]$ 上恰有三个解 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 =$ _____.
16. 函数 $y = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$ ($0 \leq x \leq 9$) 的最大值与最小值之差为 ().
 A. $2 + \sqrt{3}$ B. 4 C. 3 D. $2 - \sqrt{3}$
17. 方程 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的所有的解的和等于_____.
18. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x$ ($\omega > 0$), $x \in \mathbf{R}$, 在曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 的交点中, 若相邻交点距离的最小值为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ().
 A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. 2π

二、三角恒等变换的综合应用

- (1) 定义域: $\mathbf{R}$.
- (2) 值域: $[-|A|, |A|]$.
- (3) 最小正周期: $\left|\frac{2\pi}{\omega}\right|$.
- (4) 单调性: ① $A\omega > 0$, 增区间: $2k\pi - \frac{\pi}{2} < \omega x + \varphi < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$;
 减区间: $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \omega x + \varphi < 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$.
 ② $A\omega < 0$, 增区间: $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \omega x + \varphi < 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$;
 减区间: $2k\pi - \frac{\pi}{2} < \omega x + \varphi < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$.
- (5) 对称性: 对称轴 $\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$; 对称中心 $\omega x + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

1. 和角公式与差角公式

- (1) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$;
- (2) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$;
- (3) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \left(\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right)$
 变形形式 $\tan \alpha \pm \tan \beta = \tan(\alpha \pm \beta)(1 \mp \tan \alpha \tan \beta) \left(\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right)$.

2. 二倍角公式

- (1) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$;

变形式 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

(2) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$; 变形式 $\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$;

$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

(3) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$.

3. 辅助角公式

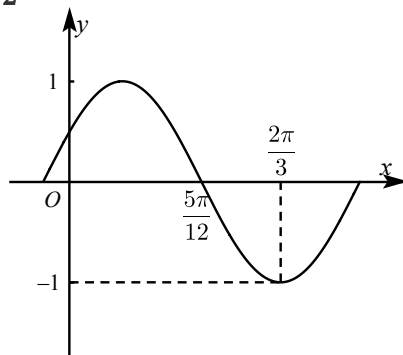
$$y = a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi) ,$$

其中 φ 所在的象限由 a 、 b 的符号确定, φ 角的值由 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ 确定 .

4. “1”的代换技巧

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha ; 1 = 2\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha , 1 = \cos 2\alpha + \sin^2 \alpha , 1 = \tan^2 \frac{\pi}{4} .$$

19. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}$, $A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 部分图象如图所示 .



(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及解析式 .

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $y = g(x)$ 的图象 . 求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值 .

20. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin^2 x + \sin x \cos x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

(1) 求 $f(x)$ 的零点 ;

(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值 .

21. 已知函数 $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 2\cos^2 x - 2$.

(1) 求 $f(x)$ 函数图像的对称轴方程 ;

(2) 求 $f(x)$ 的单调增区间 ;

(3) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值, 最小值 .

22. 已知函数 $f(x) = 4\sin^2 x + 2\sin 2x - 2$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及 $f(x)$ 取得最大值时 x 的集合 ;

- (2) 证明：函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 对称.
23. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x + a$.
- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递减区间；
- (2) 若 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的最大值与最小值的和为 $\frac{3}{2}$ ，求 a 的值.
24. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 且 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ，若函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}$ ，求 $f(B)$ 的最大值.
25. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) - 2\cos^2 \frac{\omega x}{2}$ 其中 $x \in \mathbf{R}, \omega > 0$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的值域.
- (2) 若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = -1$ 的两个相邻交点间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ ，求函数 $f(x)$ 的单调增区间.
26. 已知：向量 $\vec{a} = (2 \cos \frac{x}{4}, 2 \sin \frac{x}{4})$ ， $\vec{b} = (\sin \frac{x}{4}, -\sqrt{3} \sin \frac{x}{4})$ ，函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \sqrt{3}$.
- (1) 求函数 $y = f(x)$ 的最小正周期及最值；
- (2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象纵坐标不变，横坐标伸长为原来的2倍后，再向左平移 $\frac{2}{3}\pi$ 得到函数 $y = g(x)$ ，判断函数 $y = g(x)$ 的奇偶性，并说明理由.
27. 已知函数 $f(x) = \sin^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \sin(\omega x + \frac{\pi}{2})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .
- (1) 求 ω 的值.
- (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{2\pi}{3}]$ 上的取值范围.
28. 设函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \sin^2 x$
- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.
- (2) 设函数 $g(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ ，有 $g(x + \frac{\pi}{2}) = g(x)$ ，且当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时， $g(x) = \frac{1}{2} - f(x)$ ，求 $g(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的解析式.
29. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x + \frac{\pi}{4}) + \sin 2x - 1$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.
- (2) 若将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值，并求出取得最值时的 x 值.
30. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \sin(x + \frac{\pi}{4}) \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ， $x \in \mathbf{R}$.
- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和值域.
- (2) 若 $x = x_0$ ($x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 为 $f(x)$ 的一个零点，求 $\sin 2x_0$ 的值.