

02集合的含参典型习题

1. 子集关系的含参问题

1. 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测B卷第21题 ★★

$A = \{-1, 1\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax + b = 0\} \neq \emptyset$, 若 $B \subseteq A$, 求 $a + b$ 的值.

【备注】 【题型】 真子集问题

【答案】 0或2或-1.

【解析】 $\because A = \{-1, 1\}$, $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$,

$\therefore B = \{-1\}$ 或 $B = \{1\}$ 或 $B = \{-1, 1\}$.

① $B = \{-1\}$ 时,

$$x^2 - 2ax + b = (x + 1)^2,$$

$$\therefore \begin{cases} -2a = 2 \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore a + b = 0.$$

② $B = \{1\}$,

$$x^2 - 2ax + b = (x - 1)^2,$$

$$\therefore \begin{cases} -2a = -2 \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore a + b = 2.$$

③ $B = \{-1, 1\}$,

$$\therefore x^2 - 2ax + b = (x + 1)(x - 1),$$

$$\therefore \begin{cases} -2a = 0 \\ b = -1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases},$$

$$\therefore a + b = -1.$$

综上 $a + b = 0$ 或 2 或 -1 .

【标注】 【知识点】 集合关系中的含参问题；子集；一元二次方程的解集及其根与系数的关系

2. 2019~2020学年天津红桥区高一上学期期中第3题4分 ★★

已知集合 $A = \{2, 3\}$, $B = \{x | ax + 1 = 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 则 a 的值为 ().

A. $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$

B. $-\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{3}$ 或 0

【备注】【题型】子集合参问题

【答案】 D

【解析】 $\because B \subseteq A$, B 是 A 的子集,

①当 $B = \emptyset$ 时, $a = 0$,

②当 $B \neq \emptyset$ 时,

若 $B = \{2\}$, 则 $a = \frac{1}{2}$,

若 $B = \{3\}$, 则 $a = -\frac{1}{3}$.

故选D.

【标注】【知识点】元素与集合之间的关系;子集;集合关系中的含参问题

3. 2019~2020学年天津高一上学期期末(武清、蓟县、静海、宁河、宝坻)第16题12分 ★★

设集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 > 0\}$, $B = \{x | -4 < 3x - 7 < 8\}$.

已知集合 $C = \{x | a < x < 2a + 1\}$, 若 $C \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

【备注】【题型】子集合参问题

【答案】 (1) $[1, 2]$.

【解析】 (1) 集合 $C = \{x | a < x < 2a + 1\}$, $C \subseteq B$ 可得:

$$\begin{cases} a \geq 1 \\ 2a + 1 \leq 5 \end{cases}, \text{解得: } 1 \leq a \leq 2,$$

故实数 a 的取值范围是: $[1, 2]$.

【标注】【知识点】并集;交集;集合关系中的含参问题;子集

4. 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测B卷第9题 ★★

集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 < 0\}$, $B = \{x | x^2 - 4ax + 3a^2 < 0\}$, 且 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

【备注】【题型】母集合参问题

【答案】 $[1, 2]$.

【解析】 $x^2 - 5x + 6 < 0$,

$$(x - 2)(x - 3) < 0,$$

$$\therefore 2 < x < 3,$$

$$x^2 - 4ax + 3a^2 < 0,$$

$$(x - 3a)(x - a) < 0,$$

$$\textcircled{1} a > 0 ,$$

$$a < x < 3a ,$$

$$\because A \subseteq B ,$$

$$\therefore \begin{cases} 2 \geq a \\ 3 \leq 3a \end{cases} ,$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 2 .$$

$$\textcircled{2} a < 0 ,$$

$$3a < x < a ,$$

$$\because A \subseteq B ,$$

$$\therefore \begin{cases} 3 \leq a \\ 3a \leq 2 \end{cases} \text{无解} .$$

$$\textcircled{3} a = 0 \text{无解} .$$

综上 $a \in [1, 2]$.

【标注】【知识点】集合关系中的含参问题；子集

5. 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测B卷第22题 ★★★

$$A = \{x | x^2 - (3a + 3)x + 2(3a + 1) < 0, x \in \mathbf{R}\} , \text{ 集合 } B = \left\{x \mid \frac{x - 2a}{x - (a^2 + 1)} < 0, x \in \mathbf{R}\right\} .$$

求使 $B \subseteq A$ 的实数 a 的取值范围 .

【备注】【题型】子集、母集均含参问题

【答案】 (1) $a \in [1, 3] \cup \{-1\}$.

【解析】 (1) $x^2 - (3a + 3)x + 2(3a + 1) < 0 ,$

$$\therefore (x - 2)[x - (3a + 1)] < 0 ,$$

$$\frac{x - 2a}{x - (a^2 + 1)} < 0 ,$$

$$\therefore 2a < x < a^2 + 1 ,$$

$$\because B \subseteq A .$$

$$\textcircled{1} 3a + 1 > 2 \text{ 时 , 即 } a > \frac{1}{3} ,$$

$$A = (2, 3a + 1) ,$$

$$\therefore \begin{cases} 2a \geq 2 \\ a^2 + 1 \leq 3a + 1 \end{cases} ,$$

$$\therefore \begin{cases} a \geq 1 \\ 0 \leq a \leq 3 \end{cases} ,$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 3 ,$$

$$\textcircled{2} 3a + 1 < 2 \text{ 时 , 即 } a < \frac{1}{3} ,$$

$$\therefore A = (3a + 1, 2) ,$$

$$\therefore \begin{cases} 3a + 1 \leq 2a \\ a^2 + 1 \leq 2 \end{cases} ,$$

$$\therefore a = -1.$$

$$\textcircled{3} 3a + 1 = 2 \text{ 时,}$$

$$A = \emptyset, \text{ 不成立.}$$

综上, $a \in [1, 3] \cup \{-1\}$.

【标注】【知识点】分式不等式；子集；集合关系中的含参问题

6.

2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期单元测试《集合、不等式、均值不等式》第71题

★★★

设不等式 $x^2 - 2ax + a + 2 \leq 0$ 的解集为 M , 如果 $M \subseteq [1, 4]$, 求实数 a 的取值范围.

【备注】【题型】含参的分类讨论

$$\text{【答案】 } \left(-1, \frac{18}{7}\right].$$

【解析】 $M \subseteq [1, 4]$ 有两种情况：其一是 $M = \emptyset$, 此时 $\Delta < 0$ ；其二是 $M \neq \emptyset$, 此时 $\Delta = 0$ 或 $\Delta > 0$, 分三种情况计算 a 的取值范围.

$$\text{设 } f(x) = x^2 - 2ax + a + 2,$$

$$\text{有 } \Delta = (-2a)^2 - 4(a + 2) = 4(a^2 - a - 2),$$

$$(1) \text{ 当 } \Delta < 0 \text{ 时, } -1 < a < 2, M = \emptyset \subseteq [1, 4],$$

$$(2) \text{ 当 } \Delta = 0 \text{ 时, } a = -1 \text{ 或 } 2.$$

当 $a = -1$ 时, $M = \{-1\} \not\subseteq [1, 4]$, 故舍去.

当 $a = 2$ 时, $M = \{2\} \subseteq [1, 4]$.

$$(3) \text{ 当 } \Delta > 0 \text{ 时, 有 } a < -1 \text{ 或 } a > 2.$$

设方程 $f(x) = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$,

那么 $M = [x_1, x_2]$, 由 $M \subseteq [1, 4]$ 可得 $1 \leq x_1 < x_2 \leq 4$,

故应有 $f(1) \geq 0, f(4) \geq 0$,

且 $f(x) = 0$ 的对称轴 $x = a \in [1, 4]$,

$$\text{即 } \begin{cases} f(1) \geq 0, f(4) \geq 0 \\ 1 \leq a \leq 4, \Delta > 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} -a + 3 \geq 0 \\ 18 - 7a \geq 0 \\ 1 \leq a \leq 4 \\ a < -1 \text{ 或 } a > 2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } 2 < a \leq \frac{18}{7},$$

综上可得, $M \subseteq [1, 4]$ 时, a 的取值范围是 $\left(-1, \frac{18}{7}\right]$.

【标注】【知识点】一元二次不等式；解不等式中的分类讨论；集合关系中的含参问题；子集

2. 交并补的含参问题

集合交并运算的基础含参问题

7. 2019~2020学年9月天津北辰区天津市第四十七中学高一上学期月考第14题5分 ★★★

设集合 $A = \{x|x^2 - x - 2 \geq 0\}$, $B = \{x|x > a\}$, 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则 a 的取值范围为 _____ ; 若 $A \cap B = \{x|x \geq 2\}$, 则 a 的取值范围为 _____ .

【答案】 $(-\infty, -1]$; $[-1, 2)$

【解析】 集合 $A = \{x|x^2 - x - 2 \geq 0\} = \{x|x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -1\}$, $B = \{x|x > a\}$,

若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则 $a \leq -1$,

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty, -1]$;

若 $A \cap B = \{x|x \geq 2\}$, 则 $-1 \leq a < 2$,

$\therefore a$ 的取值范围为 $[-1, 2)$,

综上所述, 答案: $(-\infty, -1]$; $[-1, 2)$.

【标注】 【知识点】集合运算中的含参问题; 交集; 并集

并集为 $\emptyset$ 运算

8. 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测D卷第9题 ★★

对于实数集 $A = \{x|x^2 - 2ax + 4a - 3 = 0\}$ 和 $B = \{x|x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2 + a + 2 = 0\}$, 是否存在实数 a , 使 $A \cup B = \emptyset$? 若不存在, 说明理由; 若存在, 求出 a 的取值范围.

【答案】 $1 < a < 2$.

【解析】 $\because A \cup B = \emptyset$,

$\therefore A = \emptyset, B = \emptyset$,

$\therefore \begin{cases} (-2a)^2 - 4(4a - 3) < 0 \\ (-2\sqrt{2}a)^2 - 4(a^2 + a + 2) < 0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a^2 - 4a + 3 < 0 \\ 2a^2 - a^2 - a - 2 < 0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 1 < a < 3 \\ -1 < a < 2 \end{cases}$

综上 $1 < a < 2$.

【标注】 【知识点】二次函数的图象及性质; 交、并、补集混合运算; 集合运算中的含参问题; 并集



交集不为 $\emptyset$ 的运算

9. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期开学考试第7题4分 ★★

已知集合 $A = \{x | x \geq -1\}$, $B = \left\{x \mid \frac{1}{2}a \leq x \leq 2a - 1\right\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围是 () .

- A. $a \geq 1$ B. $a \geq \frac{2}{3}$ C. $a \geq 0$ D. $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$

【答案】 B

【解析】 $\because A \cap B \neq \emptyset$,

$$\therefore B \neq \emptyset \text{ 且 } 2a - 1 \geq -1,$$

$$\therefore 2a - 1 \geq \frac{1}{2}a \text{ 且 } 2a - 1 \geq -1,$$

$$\therefore a \geq \frac{2}{3} \text{ 且 } a \geq 0,$$

$$\therefore a \geq \frac{2}{3}.$$

故选 B.

【标注】【知识点】连续性集合运算中的含参问题



交集为 $\emptyset$ 的运算

10. 2020~2021学年10月天津北辰区天津市第四十七中学高一上学期月考第12题5分 ★★

已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x | a < x < a + 3\}$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $a \leq -4$ 或 $a \geq 2$

【解析】 $\because x^2 - x - 2 \leq 0$.

$$\therefore (x - 2)(x + 1) \leq 0.$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 2.$$

$$\text{又} \because A \cap B = \emptyset.$$

$$2 \leq a \text{ 或 } a + 3 \leq -1.$$

$$\therefore a \leq -4 \text{ 或 } a \geq 2.$$

【标注】【知识点】连续性集合运算中的含参问题

11. 2020~2021学年10月天津河西区天津市第四中学高一上学期月考第22题8分 ★★★

设集合 $A = \{x | a - 1 < x < a + 1\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$.

若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) 见解析

【解析】 (1) 解：集合 $A = \{x | a - 1 < x < a + 1\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$,

若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $\begin{cases} a - 1 \geq -1 \\ a + 1 \leq 2 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} a \geq 0 \\ a \leq 1 \end{cases}$, 解得： $0 \leq a \leq 1$,

则实数 a 的取值范围是 $[0, 1]$.

【标注】 【知识点】连续性集合关系中的含参问题

12. 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测C卷第5题 ★★

已知集合 $M = \{(x, y) | y = \sqrt{9 - x^2}\}$, $N = \{(x, y) | y = x + b\}$, 且 $M \cap N = \emptyset$, 求实数 b 的取值范围 .

【答案】 $b > 3\sqrt{2}$ 或 $b < -3$.

【解析】 集合 M 表示圆心在原点半径 3 的上半圆 (包括端点) , 集合 N 表示斜率为 1 的直线 , 由此可得 $b > 3\sqrt{2}$ 或 $b < -3$.

【标注】 【知识点】圆的切线的相关问题 ; 描述法 ; 交集 ; 交、并、补集混合运算

13. 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测C卷第10题 ★★

已知集合 $A = \{y | y^2 - (a^2 + a + 1)y + a(a^2 + 1) > 0\}$, $B = \left\{y | y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}, 0 \leq x \leq 3\right\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围 .

【答案】 $a \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$.

【解析】 $y^2 - (a^2 + a + 1)y + a(a^2 + 1) > 0$,

$\therefore (y - a)[y - (a^2 + 1)] > 0$,

$\therefore a^2 + 1 - a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$,

$\therefore a^2 + 1 > a$,

$\therefore y > a^2 + 1$ 或 $y < a$,

$\therefore A = (-\infty, a) \cup (a^2 + 1, +\infty)$,

$y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$,

$\therefore x \in [0, 3]$,

$\therefore (x - 1)^2 \in [0, 4]$,

$\therefore y \in [2, 4]$,

$$\therefore B = [2, 4],$$

$$\therefore A \cap B = \emptyset,$$

$$\therefore \begin{cases} 2 \geq a \\ 4 \leq a^2 + 1 \end{cases},$$

$$\therefore a \leq 2 \text{ 且 } a^2 \geq 3,$$

$$\therefore a \leq 2 \text{ 且 } a \geq \sqrt{3} \text{ 或 } a \leq -\sqrt{3},$$

$$\therefore a \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2].$$

【标注】【知识点】集合运算中的含参问题；交集；二次函数的图象及性质；一元二次不等式

并集为R运算

14. 2017~2018学年陕西西安碑林区西安市第三中学高二上学期期中理科第18题10分 ★★★

已知命题 $p: x \in A$ ，且 $A = \{x | a - 1 < x < a + 1\}$ ，命题 $q: x \in B$ ，且 $B = \{x | x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$ 。

若 $A \cap B = \emptyset$ ， $A \cup B = \mathbf{R}$ ，求实数 a 的值。

【答案】 (1) 2.

【解析】 (1) $B = \{x | x^2 - 4x + 3 \geq 0\} = \{x | x \leq 1, \text{ 或 } x \geq 3\}$ ， $A = \{x | a - 1 < x < a + 1\}$ ，

$$A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbf{R}, \text{ 得 } \begin{cases} a - 1 = 1 \\ a + 1 = 3 \end{cases}, \text{ 得 } a = 2,$$

所以满足 $A \cap B = \emptyset$ ， $A \cup B = \mathbf{R}$ 的实数 a 的值为 2。

【标注】【知识点】已知充要条件求参数范围；一元二次不等式

子集关系的交并理解

集合关系与运算的常用结论

① 子集关系的交并理解

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$$

② 交并关系的补集运算

$$\complement_U (A \cap B) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\complement_U (A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$$

【备注】【答案】①A;B

$$\textcircled{2} \complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B),$$

$$\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B).$$

15. 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测C卷第4题 ★★

设 $M = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$ ， $N = \{x | ax - 1 = 0\}$ ，若 $M \cap N = N$ ，求所有满足条件的 a 的集合。

【答案】 $\left\{-1, 0, \frac{1}{3}\right\}$.

【解析】 $\because M \cap N = N$,

$$\therefore N \subseteq M ,$$

$$\textcircled{1} N = \varnothing ,$$

$$\therefore a = 0 ,$$

$$\textcircled{2} N \neq \varnothing ,$$

$$a \neq 0 ,$$

$$\therefore N = \left\{\frac{1}{a}\right\} ,$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 ,$$

$$(x-3)(x+1) = 0 ,$$

$$\therefore x = 3 \text{ 或 } x = -1 ,$$

$$\therefore M = \{-1, 3\} ,$$

$$\therefore \frac{1}{a} = -1 \text{ 或 } \frac{1}{a} = 3 ,$$

$$\therefore a = -1 \text{ 或 } a = \frac{1}{3} .$$

$$\text{综上 } \left\{-1, 0, \frac{1}{3}\right\} .$$

【标注】【知识点】交集；集合运算中的含参问题；一元二次方程的解集及其根与系数的关系

16. 2020~2021学年天津静海区静海区第一中学高一上学期期中（七校联考）第15题11分 ★★★

已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 18 \geq 0\}$, $B = \left\{x \mid \frac{x+5}{x-14} \leq 0\right\}$.

若集合 $C = \{x | 2a < x < a+1\}$, 且 $B \cap C = C$, 求实数 a 的取值范围 .

【答案】 (1) $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$

【解析】 (1) 解： $\because B \cap C = C$,

$$\therefore C \subseteq B ,$$

当 $C = \varnothing$ 时 , $2a \geq a+1$, 解得 $a \geq 1$;

$$\text{当 } C \neq \varnothing \text{ 时 , } \begin{cases} 2a < a+1 \\ a+1 \leq 14 \\ 2a \geq -5 \end{cases} ,$$

$$\text{解得 } -\frac{5}{2} \leq a < 1 ,$$

$$\text{综上 , 实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right) .$$

【标注】【知识点】交、并、补集混合运算；离散型集合关系中的含参问题

17. 2020~2021学年10月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第17题9分 ★★

已知集合 $A = \{x|m+1 \leq x \leq 3m-1\}$, $B = \{x|x^2 - 11x + 10 \leq 0\}$.

若 $A \cap B = A$, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $(-\infty, \frac{11}{3}]$.

【解析】 (1) $\because$ 集合 $A = \{x|m+1 \leq x \leq 3m-1\}$, $B = \{x|1 \leq x \leq 10\}$.

$$A \cap B = A,$$

$$\therefore A \subseteq B,$$

当 $A = \emptyset$ 时, $m+1 > 3m-1$, 解得 $m < 1$.

$$\text{当 } A \neq \emptyset \text{ 时, } \begin{cases} m+1 \leq 3m-1 \\ m+1 \geq 1 \\ 3m-1 \leq 10 \end{cases},$$

$$\text{解得 } 1 \leq m \leq \frac{11}{3},$$

$$\therefore \text{实数 } m \text{ 的取值范围是 } (-\infty, \frac{11}{3}].$$

【标注】【知识点】交、并、补集混合运算；并集；交集；补集；集合关系中的含参问题；子集

18. 2020~2021学年10月天津北辰区天津市第四十七中学高一上学期月考第16题13分 ★★★

集合 $A = \{x|-1 \leq x < 3\}$, $B = \{x|2x-4 \geq x-2\}$, $C = \{x|a < x < 1-2a\}$.

若 $A \cup C = C$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $a < -1$.

【解析】 (1) $\because A \cup C = C$,

$$\therefore A \subseteq C,$$

$$\therefore \begin{cases} a < -1 \\ 1-2a \geq 3 \end{cases},$$

$$\therefore a < -1.$$

【标注】【知识点】连续性集合运算中的含参问题；交、并、补集混合运算

19. 2020~2021学年10月天津河西区天津市第四中学高一上学期月考第22题8分 ★★★

设集合 $A = \{x|a-1 < x < a+1\}$, $B = \{x|x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$.

若 $A \cup B = B$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) 见解析

【解析】 (1) 解: $\because$ 若 $A \cup B = B$, $\therefore A \subseteq B$,

则 $a + 1 \leq -1$ 或 $a - 1 \geq 2$,

解得: $a \leq -2$ 或 $a \geq 3$,

则实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$.

【标注】【知识点】连续性集合关系中的含参问题

20. 2020~2021学年10月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第17题4分 ★★★

已知 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 如果 $A \cup B = A$, 则实数 a 的取值范围 _____.

【答案】 $a \leq -1$ 或 $a = 1$

【解析】 $\because x^2 + 4x = 0$,

$\therefore x(x+4) = 0$,

$\therefore x = 0$ 或 $x = -4$,

又 $\because A \cup B = A$,

$\therefore B \subseteq A$,

i. $B = \emptyset$,

$\Delta < 0$,

$4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0$,

$a^2 + 2a - 1 - a^2 + 1 < 0$,

$a < -1$,

ii. $0 \in B$,

将 0 代入 $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$,

$a^2 = 1$,

$a = 1$ 或 $a = -1$,

① $a = 1$,

$x^2 + 4x = 0$,

$x = 0$ 或 $x = -4$,

$B = \{0, -4\}$,

此时 $B \subseteq A$ 符合;

② $a = -1$,

$x^2 = 0$,

$$x = 0,$$

$$B = \{0\},$$

此时 $B \subseteq A$ 符合;

$$\text{iii. } -4 \in B,$$

将 -4 代入 $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$,

$$16 - 8(a+1) + a^2 - 1 = 0,$$

$$a^2 - 8a + 7 = 0,$$

$$a = 1 \text{ 或 } a = 7,$$

$$a = 1 \text{ 已验证},$$

$$a = 7 \text{ 时},$$

$$x^2 + 16x + 48 = 0,$$

$$(x+4)(x+12) = 0,$$

$$x = -4 \text{ 或 } x = -12,$$

$$B = \{-4, -12\},$$

与 $B \subseteq A$ 矛盾,

故 $a \leq -1$ 或 $a = 1$.

【标注】【知识点】离散型集合关系中的含参问题

21. 2020~2021学年9月浙江杭州西湖区杭州学军中学高一上学期周测D卷第1题 ★★

若集合 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x | mx = 1\}$, 且 $A \cup B = A$, 则 m 的值为 ()

A. 1

B. -1

C. 1或-1

D. 1或-1或0

【答案】 D

【解析】 当 $m = 0$ 时, $B = \emptyset$ 满足 $A \cup B = A$, 即 $m = 0$; 当 $m \neq 0$ 时, $B = \left\{ \frac{1}{m} \right\}$, 而 $A \cup B = B$,
 $\therefore \frac{1}{m} = 1$ 或 -1 , $m = 1$ 或 -1 ; $\therefore m = 1, -1$ 或 0 .

【标注】【知识点】交集

22. 2019~2020学年9月天津和平区天津市耀华中学高一上学期周测D卷第10题 ★★

设 $A = \{-3, 4\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax + b = 0\}$, $B \neq \emptyset$, 且 $A \cup B = A$, 求 a , b 的值.

【答案】 $\begin{cases} a = -3 \\ b = 9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -12 \end{cases}$.

【解析】 $\because A \cup B = A$,

$$\therefore B \subseteq A,$$

$$\text{i: } B = \{-3\},$$

$$\therefore x^2 - 2ax + b = (x + 3)^2,$$

$$\therefore x^2 - 2ax + b = x^2 + 6x + 9,$$

$$\therefore \begin{cases} -2a = 6 \\ b = 9 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = -3 \\ b = 9 \end{cases},$$

$$\text{ii: } B = \{4\},$$

$$x^2 - 2ax + b = (x - 4)^2,$$

$$\therefore x^2 - 2ax + b = x^2 - 8x + 16,$$

$$\therefore \begin{cases} -2a = -8 \\ b = 16 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \end{cases},$$

$$\text{iii: } B = \{-3, 4\},$$

$$x^2 - 2ax + b = (x + 3)(x - 4),$$

$$\therefore x^2 - 2ax + b = x^2 - x - 12,$$

$$\therefore \begin{cases} -2a = -1 \\ b = -12 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -12 \end{cases}.$$

【标注】 **【知识点】** 集合运算中的含参问题；并集；等式的性质与方程的解集

23. 2019~2020学年天津红桥区高一上学期期中第18题10分 ★★

集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a + 1)x + (a^2 - 5) = 0\}$.

若 $A \cup B = A$, 求: a 的取值范围.

【答案】 (1) $a \leq -3$.

【解析】 (1) $\because A \cup B = A$,

$$\therefore B \subseteq A,$$

$$\text{①当 } B = \emptyset \text{ 时, } \Delta = 4(a + 1)^2 - 4(a^2 - 5) = 8a + 24 < 0,$$

$$\therefore a < -3;$$

$$\text{②当 } B \neq \emptyset \text{ 时,}$$

当 $x = 1 \in B$ 时, $a = -1 \pm \sqrt{3}$;
 当 $x = 2 \in B$ 时, $a = -1$ 或 -3 ;
 当 $a = -1 + \sqrt{3}$ 时, $B = \{1, -1 - 2\sqrt{3}\}$, 舍 ;
 当 $a = -1 - \sqrt{3}$ 时, $B = \{1, 1 - 2\sqrt{3}\}$, 舍 ;
 当 $a = -1$ 时, $B = \{2, -2\}$, 舍 ;
 当 $a = -3$ 时, $B = \{2\}$ 成立 ,
 综上所述: $a \leq -3$.

【标注】【知识点】交集；并集；集合运算中的含参问题；集合关系中的含参问题；子集

3. 含参一元二次方程解集问题

题型1

24. 2019~2020学年10月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第10题4分 ★

若集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$ 至多有一个元素, 则 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $[1, +\infty) \cup \{0\}$

【解析】 $\because$ 集合 A 中至多含有一个元素,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0 (*)$ 至多有一个实数根,

① 当 $a = 0$ 时, $2x + 1 = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$, 符合题意;

② 当 $a \neq 0$ 时, 因为方程 $(*)$ 至多一个实根,

所以, $\Delta = 4 - 4a \leq 0$, 解得 $a \geq 1$,

综合以上讨论得, $a \in [1, +\infty) \cup \{0\}$.

【标注】【知识点】由元素与集合的关系求参数

25. 2020~2021学年10月天津北辰区天津市第四十七中学高一上学期月考第13题5分 ★★

若集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | ax^2 - 3x + 2 = 0\}$ 中只有一个元素, 则 a 等于 _____ .

【答案】 0 或 $\frac{9}{8}$

【解析】 i、 $a = 0$,

$$-3x + 2 = 0,$$

$$x = \frac{2}{3},$$

此时 $A = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ 满足题意;

ii、 $a \neq 0$,

又 $\because A$ 中只有1个元素,

$$\therefore \Delta = 0,$$

$$9 - 8a = 0,$$

$$a = \frac{9}{8},$$

$$\frac{9}{8}x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$9x^2 - 24x + 16 = 0,$$

$$(3x - 4)^2 = 0,$$

$$x = \frac{4}{3},$$

此时 $A = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$ 满足题意,

$$\therefore a = 0 \text{ 或 } \frac{9}{8}.$$

【标注】【知识点】由元素与集合的关系求参数

题型2

26. 2020~2021学年10月天津和平区天津市第五十五中学高一上学期月考第15题4分 ★★

不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为 A , 不等式 $x^2 + x - 6 < 0$ 的解集为 B , 不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集是 $A \cap B$, 那么 $a + b$ 等于 _____.

【答案】 -3

【解析】 不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 变形得: $(x - 3)(x + 1) < 0$,

计算得出: $-1 < x < 3$, 即 $A = (-1, 3)$,

不等式 $x^2 + x - 6 < 0$ 变形得: $(x - 2)(x + 3) < 0$,

计算得出: $-3 < x < 2$, 即 $B = (-3, 2)$,

$\therefore A \cap B = (-1, 2)$, 即不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $(-1, 2)$,

$\therefore a = -1, b = -2$,

则 $a + b = -3$.

因此, 本题正确答案是: -3.

【标注】【知识点】交集

27. 2019~2020学年10月天津和平区天津市第二南开中学高一上学期月考第19题6分 ★★★

已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - ax + b = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + cx + 15 = 0\}$, $A \cap B = \{3\}$,

$A \cup B = \{3, 5\}$.

求实数 a, b, c 的值.

【答案】(1) $a=6, b=9, c=-8$.

【解析】(1) 因为 $A \cap B = \{3\}$, 所以 $3 \in B$, 所以 $3^2 + c \times 3 + 15 = 0$, 解得 $c = -8$, 所以 $B = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - 8x + 15 = 0\} = \{3, 5\}$. 而 $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{3, 5\}$, 所以 $A = \{3\}$, 方程 $x^2 - ax + b = 0$ 有两个相等的实数根都是 3, 所以 $a = 6, b = 9$, 所以 $a = 6, b = 9, c = -8$.

【标注】【知识点】元素与集合之间的关系；并集；交、并、补集混合运算；交集；集合运算中的含参问题

28.

2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期单元测试《集合、不等式、均值不等式》第40题

★★

已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$, $B = \{x | ax^2 + bx + c \leq 0\}$, 若 $A \cap B = \{x | 3 < x \leq 4\}$, $A \cup B = \mathbf{R}$, 则 $\frac{b^2}{a} + \frac{a}{c^2}$ 的最小值是 _____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\} = \{x | x > 3 \text{ 或 } x < -1\}$,

$\therefore A \cap B = (3, 4], A \cup B = \mathbf{R}$,

$\therefore -1, 4$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根, 且 $a > 0$,

则 $-1 + 4 = -\frac{b}{a} = 3$, 即 $b = -3a$,

$-1 \times 4 = \frac{c}{a} = -4$, 即 $c = -4a$,

则 $\frac{b^2}{a} + \frac{a}{c^2} = \frac{9a^2}{a} + \frac{a}{16a^2}$

$= 9a + \frac{1}{16a}$

$\geq 2\sqrt{9a \cdot \frac{1}{16a}}$

$= \frac{3}{2}$,

当且仅当 $9a = \frac{1}{16a}$, 即 $a = \frac{1}{12}$ 时, 取等号,

故最小值为 $\frac{3}{2}$.

故答案为: $\frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】交集；交、并、补集混合运算；一元二次不等式；利用基本不等式求最值；一元二次方程的解集及其根与系数的关系

29. 2020~2021学年天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期期中第19题8分 ★★

已知集合 $A = \{x|y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}\}$, $B = \{x|x^2 - 2x - m \leq 0\}$.

若 $A \cap B = \{x|-1 \leq x \leq 4\}$, 求实数 m 的值 .

【答案】 (1) 8 .

【解析】 (1) $\because A \cap B = \{x|-1 \leq x \leq 4\}$,

$\therefore 4$ 是方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 的一个根 ,

$\therefore 16 - 8 - m = 0$,

所以 $m = 8$.

【标注】【知识点】交、并、补集混合运算；集合运算中的含参问题