

02指数运算与指数函数

1. 指数运算的概念及运算公式

整数指数幂

1. 正整数指数幂

(1) 定义： $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^n (a \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 运算法则：

① $a^m \cdot a^n =$ _____

② $(a^m)^n =$ _____

③ $a^m \div a^n =$ _____

④ $(ab)^n =$ _____

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$ _____

(3) 推广：

①根据法则③ $a^m \div a^m =$ _____, 因此得到 $a^0 =$ _____

②据此可得 $a^{-n} =$ _____

2. 整数指数幂

根据1, 上面的五条运算法则可以精简为三条：

① $a^m \cdot a^n =$ _____

② $(ab)^n =$ _____

③ $(a^m)^n =$ _____

根式的概念与性质

1. n 次方根、根式的定义

如果 $x^n = a$, 那么 x 叫做 a 的 **n 次方根**, 其中 $n > 1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$.

表达式 $\sqrt[n]{a}$ 叫做**根式**, 其中 n ($n > 1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$) 叫做**根指数**, a 叫做**被开方数**.

2. 根式的性质

根据 n 次方根的意义, 可以得到：

(1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

(2) ①当 n 是奇数时, $\sqrt[n]{a^n} = a$; ②当 n 是偶数时, $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$.

(3) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

分数指数幂

1. 分数指数幂

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in N^*, n > 1),$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, m, n \in N^*, n > 1).$$

2. 0的分数指数幂

0的正分数指数幂是0，0的负分数指数幂没有意义。

2. 指数运算典型例题

实数运算

1. 计算 .

$$\sqrt{6\frac{1}{4}} - (\pi - 1)^0 - \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

2.

$$\text{计算: } \left(\frac{9}{16}\right)^{0.5} + (-3)^{-1} \div 0.75^{-2} - \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

代数运算

3. 计算 :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{0.1^{-2}(a^3b^{-3})^{\frac{1}{2}}}.$$

4. 化简下列各式 .

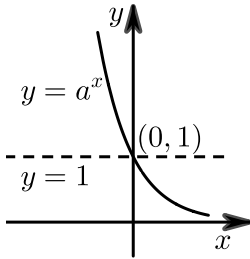
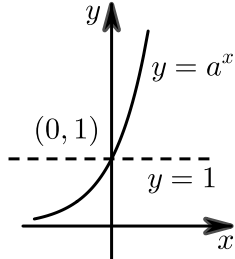
$$\left(2a^{\frac{1}{2}}b^{-1}\right)(-6\sqrt{\sqrt{a} \cdot b^3}) \div \left(-3a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}\right).$$

5. 化简或求值 :

$$(\sqrt{a-1})^2 + \sqrt{(1-a)^2} + \sqrt[3]{(1-a)^3}.$$

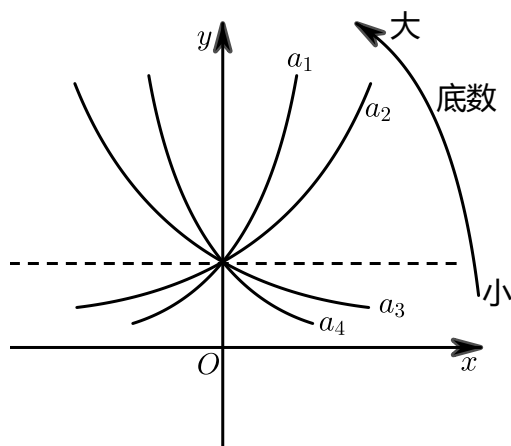
3. 指数函数的图像与性质

1. 指数函数的图像和性质

指数函数			
图象			
性质	定义域		
	值域		
	过定点		
	单调性		

2.底数对指数函数图象的影响

①在第一象限具有“底大图高”的特征



②当 $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ 时，函数 $y = a^x$ 与函数 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于y轴对称.

🔔 单调性

6. 若指数函数 $f(x) = (a^2 - 1)^x (a > 0)$ 是减函数，则实数 a 的取值范围是_____.
7. 若函数 $y = a^x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 在 $[2, 3]$ 上的最大值比最小值大 $\frac{a^2}{2}$ ，则 $a =$ _____.

🔔 比较大小

8. 设 $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$ ， $b = \left(\frac{2}{5}\right)^2$ ， $c = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$ ， $d = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$ ，则 a, b, c, d 的大小关系是().
- A. $c > a > b > d$ B. $a > c > b > d$ C. $c > a > d > b$ D. $c > d > a > b$

9. 设 $a = 4^{0.8}$, $b = 8^{0.46}$, $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

C. $c > a > b$

D. $c > b > a$

过定点问题

10. 函数 $f(x) = 2a^{x+1} - 3$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过的定点是 _____.

11. 函数 $g(x) = \frac{1}{3}a^{2x+1} - 2$ 过定点 _____.

解不等式

12. 设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 2^x - 4$ ($x \geq 0$), 则满足 $f(a-2) > 0$ 的实数 a 的取值范围为 ().

A. $(2, +\infty)$

B. $(4, +\infty)$

C. $(0, 4)$

D. $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

13. 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上奇函数, 满足在 $(0, +\infty)$ 内 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{2}$, 则 $xf(x) > 0$ 的解集是 ().

A. $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$

B. $\{x|x < -1 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$

C. $\{x|-1 < x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$

D. $\{x|-1 < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$

14. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象经过点 $(2, 4)$, 若 $a^{2x+1} < a^{3x-1}$, 则 x 的取值范围 _____.

15. 若不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2ax} < 2^{3x+a^2}$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(0, -1)$

B. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

C. $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

D. $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$

16. 已知函数 $f(x) = 2^x - x - 1$, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 ().

A. $(-1, 1)$

B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

C. $(0, 1)$

D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

实际应用

17. 某种细菌在培养的过程中, 每 15 分钟分裂一次 (由一个分裂成两个), 则这种细菌由一个分裂成 4096 个需经过 _____ 小时.

18. 放射性物质的半衰期 T 定义为每经过时间 T , 该物质的质量会衰退原来的一半, 铅制容器中有两种放射性物质 A, B , 开始记录时容器中物质 A 的质量是物质 B 的质量的 2 倍, 而 120 小时后两种物质的质量相等, 已知物质 A 的半衰期为 7.5 小时, 则物质 B 的半衰期为 ().

A. 10 小时

B. 8 小时

C. 12 小时

D. 15 小时

19. 某种食品的保鲜时间 y (单位: 小时) 与储存温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 近似满足函数关系 $y = 3^{kx+b}$ (k, b 为常数), 若该食品在 0°C 的保鲜时间是 288 小时, 在 5°C 的保鲜时间是 144 小时, 则该食品在 15°C 的保鲜时间近似是 ().

A. 32 小时

B. 36 小时

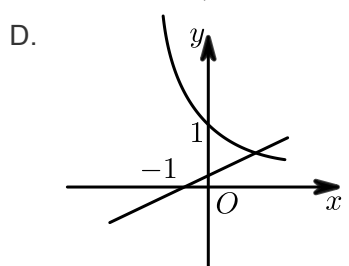
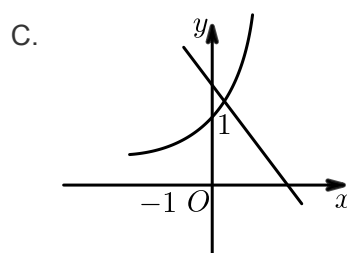
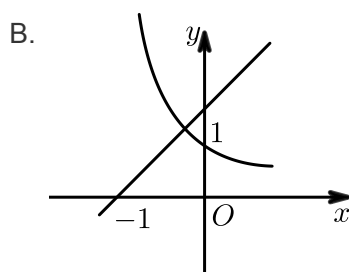
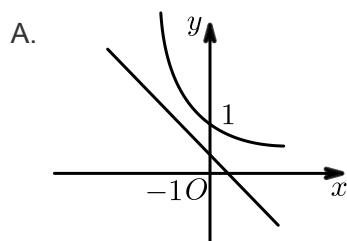
C. 48 小时

D. 60 小时

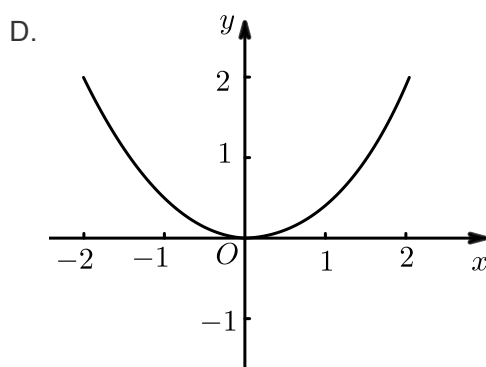
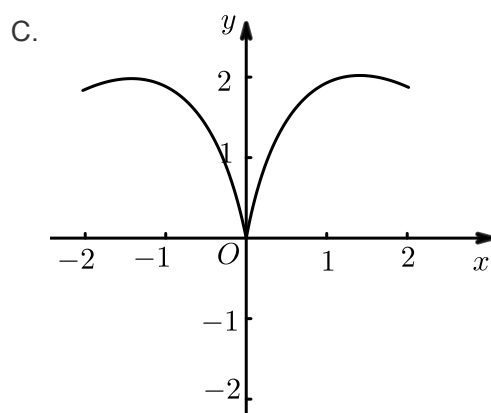
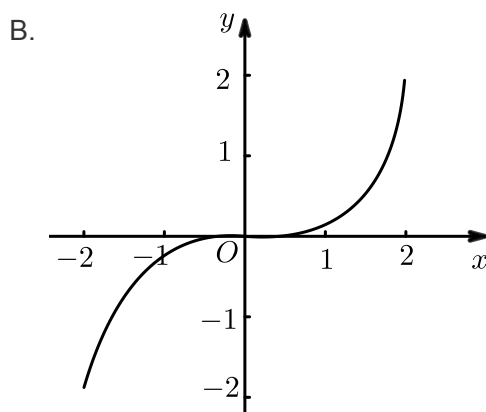
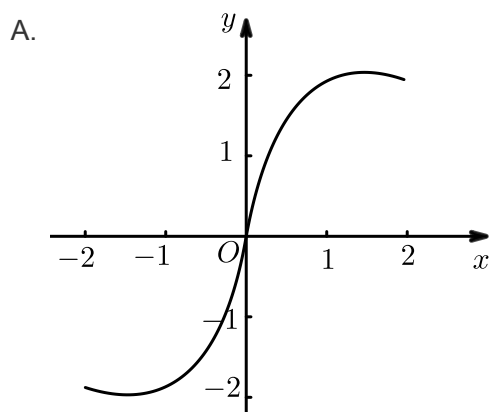
4. 指数函数综合问题

🔍 图像辨析

20. 函数 $y = x + a$ 与 $y = a^x$, 其中 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, 它们的大致图象在同一直角坐标系中有可能是 () .



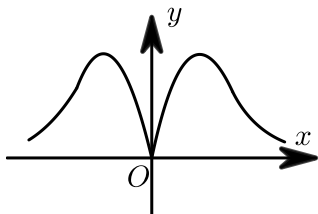
21. 函数 $f(x) = x \cdot 2^{2-|x|}$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的图象可能是 () .



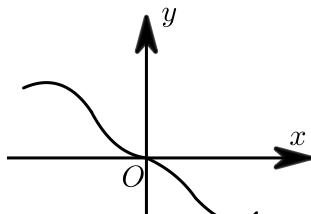
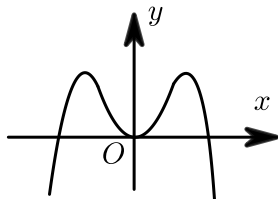
22. 函数 $f(x) = \frac{x^2}{2^x + 2^{-x}}$ 的图象大致是 () .

A.

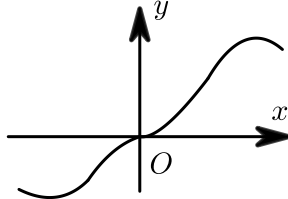
B.



C.



D.



23. 已知 $f(x) = |2^x - 1|$, 当 $a < b < c$ 时, 有 $f(a) > f(c) > f(b)$, 则必有 ().

A. $a < 0, b < 0, c < 0$

B. $a < 0, b > 0, c > 0$

C. $2^{-a} < 2^c$

D. $1 < 2^a + 2^c < 2$

分段函数单调性

24. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax - 1, & x < 0 \\ a^x - 3a, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则 a 的取值范围是 ().

A. $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$

B. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$

C. $\left(0, \frac{2}{3}\right]$

D. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

复合函数单调性

25. 函数 $y = 5^{2x^2 - 3x + 1}$ 的单调递增区间为 ().

A. $(1, +\infty)$

B. $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$

C. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

D. $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

26. 函数 $y = 5^{-x^2 + 4x - 3}$ 的单调递减区间是 ().

A. $[2, +\infty)$

B. $(-\infty, 2]$

C. $(-\infty, 1]$

D. $[1, +\infty)$

27. 讨论函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - 2x}$ 的单调性.

28. 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2 + 3x - 2}$ 的函数单调递减区间是 _____.

复合型指数函数的值域

29. 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 + 2x - 1}$ 的值域是 _____.

30. 求函数 $y = 9^x - 4 \cdot 3^x + 1$ 在 $x \in [0, 2]$ 上的值域.

31. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值与最小值的和为 6.

(1) 求函数 $f(x)$ 解析式.

(2) 求函数 $g(x) = f(2x) - 8f(x)$ 在 $[1, m]$ ($m > 1$) 上的最小值.

指数函数与函数性质综合

32. 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x + 2x - b$ (b 为常数), 则 $f(-1) = (\quad)$.

A. -5

B. -3

C. 5

D. 3

33. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$, 则不等式 $f(x+2) + f(1-2x) < 0$ 的解集为 _____.

34. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x + 1}$ 为奇函数.

(1) 求 a 的值, 并证明 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

(2) 若对任意的 $t \in [-1, 1]$, 不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.