

# 01幂函数以及二次函数练习题

## 1. 幂函数

### 求解析式

#### 1. 2020~2021学年天津西青区高一上学期期末第10题5分 ★

已知幂函数  $y = f(x)$  的图象经过点  $(2, \sqrt{2})$  , 则  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**【答案】**  $\sqrt{x}$

**【解析】** 设幂函数的解析式为  $y = x^a$  ,

$\therefore$  幂函数  $y = f(x)$  的图象过点  $(2, \sqrt{2})$  ,

$$\therefore \sqrt{2} = 2^a ,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{x} .$$

故答案为 :  $\sqrt{x}$  .

**【标注】** 【知识点】用待定系数法求解析式 ; 幂函数的概念

#### 2. 2017~2018学年天津武清区高一上学期期末第12题4分 ★★

已知幂函数  $y = f(x)$  图象过点  $(2, 8)$  , 则  $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**【答案】** 27

**【解析】** 设幂函数  $y = f(x) = x^a$  ,

其图象过点  $(2, 8)$  ,

$$\therefore 2^a = 8 ;$$

$$\text{解得 } a = 3 ,$$

$$\therefore f(x) = x^3 ,$$

$$\therefore f(3) = 3^3 = 27 .$$

故答案为 : 27 .

**【标注】** 【知识点】指数方程和指数不等式

#### 3. 2017~2018学年天津武清区高一上学期期中第9题4分 ★

已知幂函数  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbf{R}$ ) , 若  $f(2) = \frac{1}{8}$  , 则  $n = \underline{\hspace{2cm}}$  .

【答案】 -3

【解析】 幂函数  $f(x) = x^n (n \in \mathbf{R})$  ,

$$\text{且 } f(2) = \frac{1}{8} ,$$

$$\therefore 2^n = \frac{1}{8} = 2^{-3} ,$$

解得  $n = -3$  .

故答案为 : -3 .

【标注】 【知识点】 幂函数的图象及性质 ; 用直接带入法求解析式

4. 2015~2016学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第5题4分 ★

已知幂函数  $y = f(x)$  的图象经过点  $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  , 则  $f(4)$  的值为 ( ) .

A. 16

B. 2

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{1}{16}$

【答案】 C

【解析】 设幂函数为  $y = x^\alpha$  ,

$\therefore$  幂函数  $y = f(x)$  的图象经过点  $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  ,

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} = 2^\alpha ,$$

$$\text{解得 } \alpha = -\frac{1}{2} , y = x^{-\frac{1}{2}} , f(4) = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} .$$

故选 C .

【标注】 【知识点】 幂函数的概念

单调性、奇偶性

5. 2017~2018学年天津宝坻区高一上学期期中第6题4分 ★★

幂函数的图象过点  $\left(2, \frac{1}{16}\right)$  , 则它的单调递增区间是 ( )

A.  $(-\infty, 2)$

B.  $(0, +\infty)$

C.  $(-\infty, 0)$

D.  $(-\infty, +\infty)$

【答案】 C

【解析】 解 : 设幂函数  $f(x) = x^a$  ,

$$\text{则 } 2^a = \frac{1}{16} , \text{ 解得 } a = -4 ,$$

$$\therefore f(x) = x^{-4} ;$$

$$\therefore f(x) = x^{-4} \text{ 的单调递增区间是 } (-\infty, 0) ,$$

故选：C.

【标注】【知识点】幂函数的图象及性质；单调性

6. 2019~2020学年天津高一上学期期中六校联考第8题4分 ★

已知幂函数  $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^{2m-3}$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数，则  $m$  值为 ( ) .

- A. 4                      B. 3                      C. -1                      D. -1或4

【答案】A

【解析】幂函数  $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^{2m-3}$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数，

$$\therefore \begin{cases} m^2 - 3m - 3 = 1 \\ 2m - 3 > 0 \end{cases},$$

解得： $m = 4$  .

故选A .

【标注】【知识点】幂函数的概念；幂函数的图象及性质

【素养】数学运算；逻辑推理

7. 2020~2021学年天津南开区天津大学附属中学高一上学期期中第10题4分 ★

若幂函数  $y = (m^2 - m - 1)x^{m^2-2m-3}$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数，则实数  $m$  的值为 \_\_\_\_\_ .

【答案】2

【解析】 $\because (m^2 - m - 1)x^{m^2-2m-3}$  是幂函数，

$$\therefore m^2 - m - 1 = 1,$$

$$\therefore m^2 - m - 2 = 0,$$

$$\therefore (m - 2)(m + 1) = 0,$$

$$\therefore m = -1 \text{ 或 } m = 2.$$

又 $\because$ 该函数在  $(0, +\infty)$  上是减函数，

$$\therefore m^2 - 2m - 3 < 0,$$

$$\therefore (m - 3)(m + 1) < 0,$$

$$\therefore -1 < m < 3,$$

$$\therefore m = 2.$$

【标注】【知识点】幂函数的概念；幂函数的图象及性质

8. 2018~2019学年天津静海区静海区第一中学高二下学期期末第10题5分 ★★

已知幂函数  $f(x) = (m - 1)^2 x^{m^2-4m+2}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减，则  $m =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】 2

【解析】依题意幂函数  $f(x) = (m-1)^2 x^{m^2-4m+2}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减，

$$\therefore (m-1)^2 = 1,$$

解得  $m = 0$  或  $m = 2$ ，

当  $m = 0$  时， $f(x) = x^2$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增，与题设矛盾，舍去，

$$\therefore m = 2.$$

故答案为：2.

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式；幂函数的图象及性质

9. 2015~2016学年天津高一上学期期中六校联考第9题4分 ★★

幂函数  $y = (m^2 - 2m - 2)x^{-4m-2}$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数，则实数  $m = \underline{\hspace{2cm}}$  .

【答案】 -1

【解析】 $\because$  幂函数  $y = (m^2 - 2m - 2)x^{-4m-2}$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数，

$$\therefore m^2 - 2m - 2 = 1, \quad -4m - 2 > 0,$$

解得  $m = -1$  .

故答案为：-1 .

【标注】【知识点】幂函数的图象及性质

10. 2018~2019学年浙江宁波余姚市余姚中学高一上学期期中第2题4分 ★

设  $a \in \{-1, 1, 2, 3\}$ ，则使函数  $y = x^a$  的值域为  $\mathbf{R}$  且为奇函数的所有  $a$  值为 ( ) .

A. 1, 3

B. -1, 1

C. -1, 3

D. -1, 1, 3

【答案】 A

【解析】当  $a = -1$  时， $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ ，为奇函数，但值域为  $\{x|x \neq 0\}$ ，不满足条件 .

当  $a = 1$  时， $y = x$ ，为奇函数，值域为  $\mathbf{R}$ ，满足条件 .

当  $a = 2$  时， $y = x^2$  为偶函数，值域为  $\{x|x \geq 0\}$ ，不满足条件 .

当  $a = 3$  时， $y = x^3$  为奇函数，值域为  $\mathbf{R}$ ，满足条件 .

故选 A .

【标注】【知识点】用图象法求值域

11. 2020~2021学年9月重庆沙坪坝区重庆市第一中学高三上学期月考第13题5分 ★★

若幂函数  $f(x)$  过点  $(2, 8)$ ，则满足不等式  $f(a-3) \leq f(1-a)$  的实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $a \leq 2$

【解析】 令幂函数  $f(x) = x^n$ ，则  $8 = 2^n \Rightarrow n = 3$ ，

$$\therefore f(x) = x^3,$$

易知  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上为增函数，

$$\text{又 } f(a-3) \leq f(1-a),$$

$$\therefore a-3 \leq 1-a,$$

$$\therefore a \leq 2.$$

【标注】 【知识点】 幂函数的图象及性质

## 2. 二次函数

 根据不等式解集确定参数值

12. 2016~2017学年北京丰台区高一下学期期中B卷第12题4分 ★★

已知关于  $x$  的不等式  $(ax-1)(x+1) > 0$  的解集是  $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ，则  $a =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】 2

【解析】 由于关于  $x$  的不等式  $(ax-1)(x+1) > 0$  的解集是  $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ，

$$\text{所以 } a > 0, \text{ 且 } \frac{1}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } a = 2.$$

【标注】 【知识点】 一元二次不等式

【素养】 数学运算

13. 2016~2017学年上海浦东新区高一上学期期中理科第9题5分 ★★

一元二次不等式  $x^2 + bx + c \leq 0$  的解集为  $[-2, 5]$ ，则  $bc =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】 30

【解析】 一元二次不等式  $x^2 + bx + c \leq 0$  的解集为  $[-2, 5]$ ，

所以对应一元二次方程  $x^2 + bx + c = 0$  的实数根为  $-2$  和  $5$ ，

$$\text{由根与系数的关系得 } \begin{cases} -2 + 5 = -b \\ -2 \times 5 = c \end{cases},$$

解得  $b = -3$  ,  $c = -10$  ;

所以  $bc = 30$  .

故答案为 : 30 .

**【标注】**【知识点】一元二次不等式

14. 2018~2019学年10月广东深圳南山区深圳市南山区育才中学高一上学期月考第18题12分 ★★

已知不等式  $x^2 + 2x - 3 < 0$  的解集为  $A$  , 不等式  $x^2 - x - 6 < 0$  的解集为  $B$  .

( 1 ) 求  $A \cap B$  .

( 2 ) 若不等式  $x^2 + ax + b < 0$  的解集为  $A \cap B$  , 求  $a$ 、 $b$  的值 .

**【答案】** ( 1 )  $A \cap B = (-2, 1)$  .

$$( 2 ) \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} .$$

**【解析】** ( 1 )  $\because x^2 - 2x - 3 < 0$  ,

$$\therefore (x - 3)(x + 1) < 0 ,$$

$$\text{解得 : } -1 < x < 3 ,$$

$$\therefore A = \{x | -1 < x < 3\} ,$$

$$\because x^2 + x - 6 < 0 ,$$

$$\therefore (x + 3)(x - 2) < 0 ,$$

$$\text{解得 : } -3 < x < 2 ,$$

$$\therefore B = \{x | -3 < x < 2\} ,$$

$$\therefore A \cap B = \{x | -1 < x < 2\} .$$

( 2 ) 由 ( 1 ) 得 :  $-1, 2$  为方程  $x^2 + ax + b = 0$  的两根 ,

$$\begin{aligned} \therefore \begin{cases} 1 - a + b = 0 \\ 4 + 2a + b = 0 \end{cases} , \\ \therefore \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} . \end{aligned}$$

**【标注】**【知识点】一元二次不等式 ; 交集

 分类讨论求解不等式

15. 2017~2018学年10月广东深圳南山区深圳市第二高级中学高一上学期月考第18题12分 ★★

解关于  $x$  的不等式  $12x^2 - ax > a^2 (a \in \mathbf{R})$  .

**【答案】** ①当  $a > 0$  时 , 不等式的解集为  $\left\{x \mid x < -\frac{a}{4} \text{ 或 } x > \frac{a}{3}\right\}$  ;

②当  $a = 0$  时 , 不等式的解集为  $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0\}$  ;

③当  $a < 0$  时, 不等式的解集为  $\left\{x \mid x > -\frac{a}{4} \text{ 或 } x < \frac{a}{3}\right\}$ .

【解析】 令  $12x^2 - ax - a^2 = (3x - a)(4x + a) = 0$ , 解得  $x = \frac{a}{3}$  或  $x = -\frac{a}{4}$ ,

①当  $a > 0$  时, 不等式的解集为  $\left\{x \mid x < -\frac{a}{4} \text{ 或 } x > \frac{a}{3}\right\}$ ;

②当  $a = 0$  时, 不等式的解集为  $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0\}$ ;

③当  $a < 0$  时, 不等式的解集为  $\left\{x \mid x > -\frac{a}{4} \text{ 或 } x < \frac{a}{3}\right\}$ .

【标注】【知识点】一元二次不等式

16. ★★

求关于  $x$  的不等式  $ax^2 - 2(a+1)x + 4 > 0$  的解.

【答案】 当  $a = 0$  时, 不等式的解集为  $(-\infty, 2)$ ;

当  $a < 0$  时, 不等式的解集为  $\left(\frac{2}{a}, 2\right)$ ;

当  $0 < a < 1$  时, 不等式的解集为  $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$ ;

当  $a = 1$  时, 不等式的解集为  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ ;

当  $a > 1$  时, 不等式的解集为  $\left(-\infty, \frac{2}{a}\right) \cup (2, +\infty)$ .

【解析】 ①若  $a = 0$  时, 不等式为  $-2x + 4 > 0$ , 解得  $x < 2$ ;

②若  $a \neq 0$ , 不等式为  $ax^2 - 2(a+1)x + 4 = (x-2)(ax-2) = a(x-2)\left(x - \frac{2}{a}\right) > 0$ .

当  $a < 0$  时, 不等式变为  $(x-2)\left(x - \frac{2}{a}\right) < 0$ , 又  $\frac{2}{a} < 2$ , 故  $\frac{2}{a} < x < 2$ ;

当  $a > 0$  时, 不等式变为  $(x-2)\left(x - \frac{2}{a}\right) > 0$  比较  $2$  与  $\frac{2}{a}$ :

(i) 若  $2 > \frac{2}{a}$ , 即  $a > 1$ , 解得:  $x > 2$  或  $x < \frac{2}{a}$ ;

(ii) 若  $2 < \frac{2}{a}$ , 即  $0 < a < 1$ , 解得:  $x > \frac{2}{a}$  或  $x < 2$ ;

(iii) 若  $a = 1$ , 即  $2 = \frac{2}{a}$ , 解得  $x \neq 2$ .

综上知: 当  $a = 0$  时, 不等式的解集为  $(-\infty, 2)$ ;

当  $a < 0$  时, 不等式的解集为  $\left(\frac{2}{a}, 2\right)$ ;

当  $0 < a < 1$  时, 不等式的解集为  $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$ ;

当  $a = 1$  时, 不等式的解集为  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ ;

当  $a > 1$  时, 不等式的解集为  $\left(-\infty, \frac{2}{a}\right) \cup (2, +\infty)$ .

【标注】【知识点】一元二次不等式; 含字母系数的不等式; 解不等式中的分类讨论