

01幂函数以及二次函数

1. 幂函数的定义

【备注】 【教师备注】

幂函数一讲考题在天津本地近三年高一上学期的考试卷中出现次数较低，属于低频次知识章节，老师们在讲课时可以适当性说明一下此讲的考频情况，并在讲授时进行适当取舍。

幂函数定义

一般地， $y = x^\alpha$ 叫做**幂函数**，其中 x 是自变量， α 是常数。

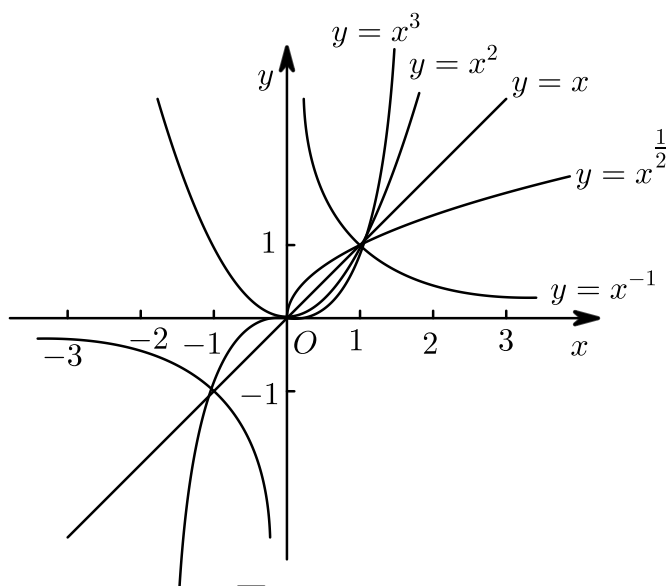


图2-3-1

【备注】 【教师备注】 幂函数的构成条件：

①系数为1；②底数是单个自变量 x ；③指数为常数。

反例： $y = \frac{1}{2}x^2$ ， $y = (x+1)^3$ ， $y = x^x$ 都不是幂函数。

判断是否幂函数

1. ★★

下列函数中是幂函数的是（ ）

A. $y = 2x^2$

B. $y = x^{\frac{1}{3}} + x^2$

C. $y = x^e (e = 2.71828\cdots)$

D. $y = (x-1)^3$

【答案】 C

【标注】【知识点】幂函数的概念

利用幂函数定义求解析式

【备注】【教师备注】幂函数中考察频次最高的题型

2. 2020~2021学年天津河西区高一上学期期中第11题5分 ★★

已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，则 $f(x)$ 的解析式为 _____。

【答案】 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

【解析】 $\because y = f(x)$ 为幂函数，

$$\therefore f(x) = x^a,$$

又 $\because f(x)$ 图象过点 $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，

$$\therefore 2^a = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore 2^a = 2^{-\frac{1}{2}},$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) = x^{-\frac{1}{2}}.$$

【标注】【知识点】幂函数恒过定点问题

3. 2016~2017学年江苏宿迁沭阳县高一上学期期中第2题5分 ★

已知幂函数 $f(x) = k \cdot x^a$ 的图象过点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，则 $k + a$ 等于 _____。

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】 幂函数 $f(x) = k \cdot x^a$ 的图象过点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，

$$\therefore \begin{cases} k = 1 \\ k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^a = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\text{故 } k + a = \frac{3}{2}.$$

【标注】【知识点】幂函数的概念

4. 2016~2017学年天津武清区高一上学期期中理科第6题4分 ★★

已知函数 $f(x)$ 是幂函数，若 $f(2) = 4$ ，则 $f(3)$ 等于 ()。

A. 9

B. 8

C. 6

D. $\sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】 设幂函数 $f(x) = x^\alpha$,

$$\text{满足 } f(2) = 4 ,$$

$$\therefore 2^\alpha = 4 ,$$

$$\text{解得 } \alpha = 2 ;$$

$$\therefore f(x) = x^2 ,$$

$$\therefore f(3) = 3^2 = 9 .$$

故选 A .

【标注】 【知识点】 幂函数的概念

5. 2015~2016学年天津红桥区高一上学期期中理科第11题5分 ★

如果幂函数 $f(x) = x^n$ 的图象经过点 $(2, 2\sqrt{2})$, 则 $f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 8

【解析】 $\because f(x) = x^n$ 过点 $(2, 2\sqrt{2})$.

$$\therefore 2\sqrt{2} = 2^n .$$

$$\therefore n = \frac{3}{2} .$$

$$\therefore f(x) = x^{\frac{3}{2}} .$$

$$\therefore f(4) = 4^{\frac{3}{2}} = 8 .$$

【标注】 【知识点】 幂函数的概念

6. 2018~2019学年天津河东区高一上学期期中第12题4分 ★

已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $\left(3, \frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right)$, 则 $f(8) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】 设幂函数为 $f(x) = x^\alpha$,

$$\text{则 } f(3) = 3^\alpha = \frac{\sqrt[3]{3}}{3} = 3^{-\frac{2}{3}} ,$$

$$\therefore \alpha = -\frac{2}{3} ,$$

$$\therefore f(x) = x^{-\frac{2}{3}} ,$$

$$f(8) = 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} .$$

故答案为: $\frac{1}{4}$.

【标注】 【知识点】 幂函数的概念; 用直接带入法求解析式

7. 2017~2018学年天津高一上学期期中第5题4分 ★

幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $(2, m)$, 且 $f(m) = 16$, 则实数 m 的所有可能的值为 () .

- A. 4或 $\frac{1}{2}$ B. ± 2 C. 4或 $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{4}$ 或 2

【答案】 C

【解析】 因为幂函数的解析式为 $f(x) = x^\alpha$,

由图象过点 $(2, m)$ 可得 $m = 2^\alpha$,

$f(m) = (2^\alpha)^\alpha = 16$, 计算得出 $\alpha = \pm 2$,

故 $m = 4$ 或 $\frac{1}{4}$.

故选 C .

【标注】 【知识点】 幂函数的概念 ; 实数指数幂运算

8. 2020~2021学年天津红桥区高一上学期期末第6题4分 ★★

若幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(25, 5)$, 则 $f(x)$ 的定义域为 () .

- A. $\mathbf{R}$ B. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ C. $[0, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

【答案】 C

【解析】 $\because f(x)$ 为幂函数 ,

$\therefore f(x) = x^a$,

$5 = 25^a$,

$\therefore a = \frac{1}{2}$,

$\therefore f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$,

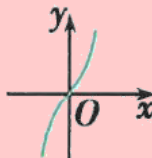
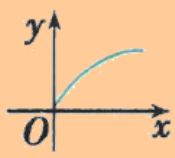
$\therefore x \geq 0$.

故选 C .

【标注】 【知识点】 求具体函数 (包括复合函数) 的定义域 ; 幂函数的概念

2. 幂函数的图像特征

1. 借助图像观察幂函数的特征

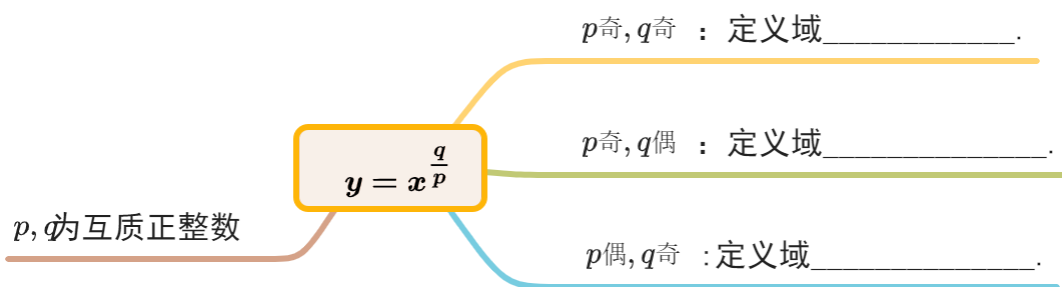
	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{-1}$
图像					
定义域					
值域					
奇偶性					
单调性					
定点					
所在象限					

【备注】 【答案】

	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{-1}$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
值域	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
单调性	单调递增	在 $(-\infty, 0]$ 上 减 在 $[0, +\infty)$ 上 增	单调递增	单调递增	在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减
定点	$(0, 0), (1, 1)$	$(0, 0), (1, 1)$	$(0, 0), (1, 1)$	$(0, 0), (1, 1)$	$(1, 1)$
所在象限	一、三	一、二	一、三	—	一、三

2. 幂函数的定义域

- (1) 当幂指数取正整数时，定义域为 $\mathbf{R}$ ；
- (2) 当幂指数取零或负整数时，定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ；
- (3) 当幂指数取分数时，可以化成根式，利用根式的要求求定义域。



【备注】 【答案】 ① $\mathbf{R}$; ② $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; ③ $\mathbf{R}$; ④ $\mathbf{R}$; ⑤ $[0, +\infty)$

3. 依据图像高低判断幂指数大小

- ①在 $(0, 1)$ 上, 指数越大, 幂函数图像越靠近 x 轴;
- ②在 $(1, +\infty)$ 上, 指数越大, 幂函数图像越远离 x 轴.

【备注】 【教师备注】

2. 图像: ①在 $(0, 1)$ 上, 指大图低; ②在 $(1, +\infty)$ 上, 指大图高.

4. 幂函数的奇偶性

- ①当 n 为偶数时, $y = x^{\frac{n}{m}}$ 为 偶函数;
- ②当 n 为奇数, m 为奇数时, $y = x^{\frac{n}{m}}$ 为 奇函数;
- ③当 n 为奇数, m 为偶数时, $y = x^{\frac{n}{m}}$ 为 非奇非偶函数.

特别地, 幂函数 $y = x^n$ ($n \in \mathbf{Z}$), 当 n 为偶数时, $y = x^n$ 为偶函数;
当 n 为奇数时, $y = x^n$ 为奇函数.

幂函数定义域

9. 2020~2021 学年天津静海区静海区第一中学高一上学期期中 (七校联考) 第5题4分 ★★

已知幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2+m-3}$, 其图象与坐标轴无交点, 则实数 m 的值为 ().

- A. 2 或 -1 B. 2 C. -2 或 1 D. -1

【答案】 D

【解析】 $\because f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2+m-3}$ 是幂函数,

$$\therefore m^2 - m - 1 = 1,$$

$$\therefore m^2 - m - 2 = 0,$$

$$\therefore (m - 2)(m + 1) = 0,$$

$$\therefore m = 2 \text{ 或 } m = -1,$$

又 $\because$ 其图象与坐标轴无交点,

$$\therefore m^2 + m - 3 < 0,$$

$\therefore$ 当 $m = 2$ 时, $m^2 + m - 3 > 0$ 舍,

$\therefore m = -1$.

故选 D.

【标注】【知识点】幂函数的图象及性质；幂函数的概念

幂函数单调性

10. 2020~2021学年天津东丽区高一上学期期末第3题5分 ★

下列幂函数在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减的是 ().

A. $y = x$

B. $y = x^2$

C. $y = x^3$

D. $y = x^{-1}$

【答案】 D

【解析】 A 选项：函数 $y = x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增，故 A 错误；

B 选项：函数 $y = x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增，故 B 错误；

C 选项：函数 $y = x^3$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增，故 C 错误；

D 选项：函数 $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减，故 D 正确。

故选 D.

【标注】【知识点】幂函数的图象及性质

11. 2020~2021学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第3题4分 ★★

幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象过点 $(-2, 4)$ ，那么函数 $f(x)$ 单调递增区间是 ().

A. $(-\infty, +\infty)$

B. $[0, +\infty)$

C. $(-\infty, 0]$

D. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象过点 $(-2, 4)$ ，
则 $(-2)^a = 4$ ，解得 $a = 2$ ，

$\therefore f(x) = x^2$ ，

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间是 $[0, +\infty)$ 。

故选 B.

【标注】【知识点】幂函数的图象及性质

12. 2018~2019学年海南海口美兰区海口市第四中学高一上学期期末第15题5分 ★★

已知函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2+m-3}$ 是幂函数，且 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x)$ 是增函数，则 m 的值为 _____ .

【答案】 2

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2+m-3}$ 是幂函数，

$$\therefore m^2 - m - 1 = 1,$$

$$\text{即 } m^2 - m - 2 = 0,$$

解得 $m = 2$ 或 $m = -1$;

当 $m = 2$ 时， $m^2 + m - 2 = 3 > 0$ ， $f(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上是增函数，满足题意；

当 $m = -1$ 时， $m^2 + m - 3 < 0$ ， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，不满足题意；

所以， m 的值为 2 .

【标注】 【知识点】 幂函数的图象及性质；幂函数的概念

13. 2018~2019学年天津高一上学期期末新四区联考第10题 ★★

幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m + 3)x^{m^2-m-2}$ ，当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x)$ 是减函数，则实数 $m =$ _____ .

【答案】 1

【解析】 $\because$ 幂函数 $y = (m^2 - 3m + 3)x^{m^2-m-2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，

$$\therefore \begin{cases} m^2 - 3m + 3 = 1 \\ m^2 - m - 2 < 0 \end{cases},$$

解得 $m = 1$.

【标注】 【知识点】 利用单调性求函数最值

14. 2020~2021学年10月湖北武汉洪山区华中师范大学第一附属中学高一上学期周测B卷第2题5分

★★

幂函数 $f(x) = (m^2 - 6m + 9)x^{m^2-3m+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，则 m 的值为 () .

A. 2

B. 3

C. 4

D. 2或4

【答案】 C

【解析】 幂函数 $f(x) = (m^2 - 6m + 9)x^{m^2-3m+1}$ 中，

$$m^2 - 6m + 9 = 1, \text{ 解得 } m = 2 \text{ 或 } m = 4,$$

当 $m = 2$ 时， $f(x) = x^{-2}$ ，在 $(0, +\infty)$ 上是单调减函数，不满足题意；

当 $m = 4$ 时, $f(x) = x^4$, 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增函数, 满足题意;
所以 m 的值是 4 .
故选 C .

【标注】【知识点】幂函数的概念; 幂函数的图象及性质; 求单调区间

15. 2020~2021 学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第4题4分 ★

已知 $y = (m^2 + m - 5)x^m$ 是幂函数, 且在第一象限是单调递减的, 则 m 的值为 () .
A. -3 B. 2 C. -3 或 2 D. 3

【答案】 A

【标注】【知识点】幂函数的概念; 幂函数的图象及性质

16. 2018~2019 学年天津滨海新区高二下学期期末第7题5分 ★★

“ $\alpha = 3$ ”是“ $f(x) = x^\alpha$ ”在 $(0, +\infty)$ 内单调递增”的 () .
A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 $\alpha = 3$ 时, $f(x) = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,
 $\therefore$ “ $\alpha = 3$ ”是“ $f(x) = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增”的充分条件成立,
又 $\because$ 当 $f(x) = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增时由幂函数性质得 $\alpha > 0$,
 $\therefore$ “ $\alpha = 3$ ”是“ $f(x) = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增”的充分不必要条件 .
故选 B .

【标注】【知识点】充要条件与函数结合

 幂函数奇偶性

17. 2020~2021 学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第12题4分 ★

若幂函数 $y = (m^2 - 3m + 3)x^{m-2}$ 的图象关于原点对称, 则 m 的取值为 _____ .

【答案】 1

【解析】 $\because y = (m^2 - 3m + 3)x^{m-2}$ 为幂函数,
 $\therefore m^2 - 3m + 3 = 1$,
 $\therefore (m - 2)(m - 1) = 0$,

$\therefore m = 2$ 或 $m = 1$,

当 $m = 1$ 时,

$f(x) = \frac{1}{x}$ 关于原点对称,

当 $m = 2$ 时,

$f(x) = x^0$ 不关于原点对称,

综上 $m = 1$.

【标注】【知识点】幂函数的图象及性质

18. 2016~2017学年天津和平区高一上学期期中第3题4分 ★★

设 $\alpha \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$, 则使函数 $y = x^\alpha$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且该函数为奇函数的 α 值为 ().

A. 1或3

B. -1或1

C. -1或3

D. -1、1或3

【答案】 A

【解析】 当 $\alpha = -1$ 时, 函数的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 不满足定义域为 $\mathbf{R}$;

当 $\alpha = 1$ 时, 函数 $y = x^\alpha$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且为奇函数, 满足要求;

当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 函数的定义域为 $\{x|x \geq 0\}$, 不满足定义域为 $\mathbf{R}$;

当 $\alpha = 2$ 时, 函数 $y = x^\alpha$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且为偶函数, 不满足要求;

当 $\alpha = 3$ 时, 函数 $y = x^\alpha$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且为奇函数, 满足要求;

故选 A.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】 幂函数的图象及性质

【知识点】 利用定义判断函数奇偶性

19. 2019~2020学年高一上学期期中 ★★★

已知函数 $f(x) = (m^2 + m - 1)x^{m+3}$ 是幂函数, 且该函数是偶函数, 则 m 的值是 ____.

【答案】 1

【解析】 解: 由题意得: $m^2 + m - 1 = 1$, 解得: $m = 1$ 或 $m = -2$,

$m = 1$ 时, $f(x) = x^4$ 是偶函数, 符合题意,

$m = -2$ 时, $f(x) = x$ 是奇函数, 不符合题意,

故 $m = 1$,

故答案为: 1.

【标注】【知识点】利用函数奇偶性求参数

20. 2020~2021学年江苏苏州工业园区苏州工业园区星海实验中学高一上学期期中第2题5分 ★★

幂函数 $y = f(x)$ 经过点 $(3, \sqrt{3})$ ，则 $f(x)$ 是 () .

- A. 偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
 B. 偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数
 C. 奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 上减函数
 D. 非奇非偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

【答案】 D

【解析】 设幂函数的解析式为 $y = x^a$ ，

将 $(3, \sqrt{3})$ 代入解析式得：

$$3^a = \sqrt{3}, \text{ 解得 } a = \frac{1}{2},$$

$$\therefore y = x^{\frac{1}{2}}.$$

故选 D .

【标注】 【知识点】 幂函数的图象及性质

 利用幂函数解不等式

21. 2018~2019学年12月天津南开区天津中学高一上学期月考第16题4分 ★★

已知幂函数 $f(x)$ 过点 $(2, \sqrt{2})$ ，则满足 $f(2-a) > f(a-1)$ 的实数 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\left[1, \frac{3}{2}\right)$

【解析】 设幂函数 $y = f(x) = x^\alpha$ ， $\alpha \in \mathbf{R}$ ；

$\therefore$ 其图象过点 $(2, \sqrt{2})$ ，

$$\therefore 2^\alpha = \sqrt{2},$$

$$\text{解得 } \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x};$$

$\therefore$ 不等式 $f(2-a) > f(a-1)$ 可化为

$$\sqrt{2-a} > \sqrt{a-1},$$

$$\text{即 } \begin{cases} 2-a > a-1 \\ a-1 \geq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } 1 \leq a < \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left[1, \frac{3}{2}\right).$$

故答案为： $\left[1, \frac{3}{2}\right)$.

【标注】 【知识点】 幂函数的图象及性质

22. 2019~2020学年天津宁河县高一上学期期中第20题13分 ★★★

已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 5m + 7) \cdot x^{m-1}$ 是偶函数，其中 $m \in \mathbf{R}$.

(1) 求 m .

(2) 解关于 x 的不等式 $f(x) \geq (a+1)x - a$, $a \in \mathbf{R}$.

【答案】 (1) 3 .

(2) 当 $a < 1$ 时，不等式解集为 $\{x|x \leq a \text{ 或 } x \geq 1\}$;

当 $a = 1$ 时，不等式解集为 $\mathbf{R}$;

当 $a > 1$ 时，不等式解集为 $\{x|x \leq 1 \text{ 或 } x \geq a\}$.

【解析】 (1) 由题意可得 $m^2 - 5m + 7 = 1$ 解得 $m = 2$ 或 $m = 3$.

当 $m = 2$ 时， $f(x) = x$ 不是偶函数，故舍去；

当 $m = 3$ 时， $f(x) = x^2$ 符合题意，所以 $m = 3$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) \geq (a+1)x - a$ 等价于

$x^2 - (a+1)x + a \geq 0$, 即 $(x-a)(x-1) \geq 0$.

①当 $a < 1$ 时，不等式解集为 $\{x|x \leq a \text{ 或 } x \geq 1\}$;

②当 $a = 1$ 时，不等式解集为 $\mathbf{R}$;

③当 $a > 1$ 时，不等式解集为 $\{x|x \leq 1 \text{ 或 } x \geq a\}$,

综上所述：当 $a < 1$ 时，不等式解集为 $\{x|x \leq a \text{ 或 } x \geq 1\}$;

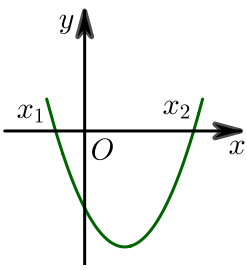
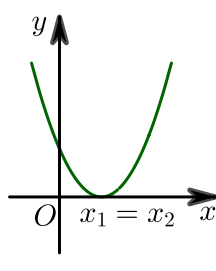
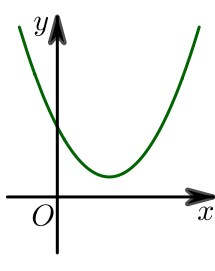
当 $a = 1$ 时，不等式解集为 $\mathbf{R}$;

当 $a > 1$ 时，不等式解集为 $\{x|x \leq 1 \text{ 或 } x \geq a\}$.

【标注】【知识点】幂函数的概念；解不等式中的分类讨论

3. 二次函数

1. 二次函数图像及对应一元二次方程根的分布

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ 的图象			
判别式的情况			
$ax^2 + bx + c = 0$ 的根			
零点个数			

【备注】 【答案】

判别式的情况	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ 的根	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	方程无实根
零点个数	两个	一个	无

【教师备注】

类似可推导开口向下的情况

2. 韦达定理

设 x_1, x_2 , 为方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两实根, 则_____

【备注】 【答案】

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

二次函数的图像和性质

23. 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第7题4分 ★★

已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, 其中 $a \neq b$, 则“ $f(2) = 4$ ”是“ $f(a) = f(b)$ ”的 () .

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 C

【解析】 若 $f(a) = f(b)$ 则 $a^2 + a^2 + b = b^2 + ab + b$,

$$\text{即 } 2a^2 - ab - b^2 = 0 ,$$

$$\text{则 } (a - b)(2a + b) = 0 ,$$

$$\because a \neq b,$$

$\therefore 2a + b = 0$, 即 $b = -2a$, 此时 $f(2) = 4 + 2a + b = 4$, 即必要性成立,

若 $f(2) = 4 = 4 + 2a + b$. 则 $2a + b = 0$, $b = -2a$,

$$\text{则 } f(x) = x^2 + ax + b = x^2 + ax - 2a,$$

$$\text{则 } f(a) = a^2 + a^2 + b = 2a^2 - 2a,$$

$$f(b) = b^2 + ab + b$$

$$= (-2a)^2 + a(-2a) - 2a$$

$$= 2a^2 - 2a,$$

则 $f(a) = f(b)$, 即充分性成立,

即 $f(2) = 4$ 是 $f(a) = f(b)$ 的充要条件.

故选 C.

【标注】【知识点】二次函数的图象及性质；充要条件与函数结合

24. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期开学考试第6题4分 ★★

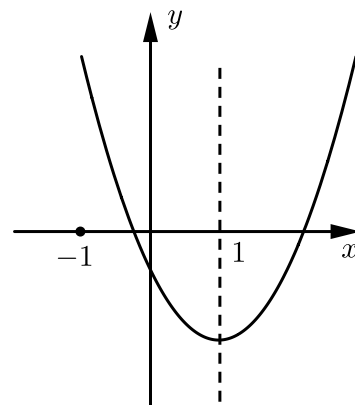
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 对称轴是直线 $x = 1$. 下列结论:

① $abc < 0$;

② $3a + c > 0$;

③ $(a + c)^2 - b^2 < 0$.

其中结论正确的个数为 ().



A. 0个

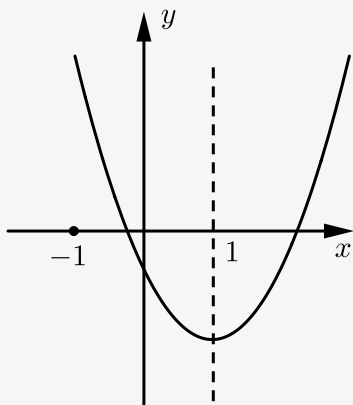
B. 1个

C. 2个

D. 3个

【答案】 C

【解析】



$\therefore$ 对称轴为 $x = 1$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1 ,$$

$$\therefore b = -2a ,$$

开口朝上 , $\therefore a > 0$,

当 $x = -1$ 时对应的值 > 0 ,

$$\therefore a - b + c > 0 ,$$

当 $x = 0$ 时对应的值 < 0 ,

$$\therefore c < 0 ,$$

$$abc = a \times (-2a) \cdot c$$

$$= -2a^2 \cdot c > 0 ,$$

$\therefore$ ①错 ;

$$\therefore a - b + c > 0 ,$$

$$\therefore a + 2a + c > 0 ,$$

$$\therefore 3a + c > 0 ,$$

$\therefore$ ②正确 ;

当 $x = 1$ 时对应的值 < 0 ,

$$a + b + c < 0 ,$$

$$\therefore (a + b + c)(a - b + c) < 0 ,$$

$$(a + c)^2 - b^2 < 0 ,$$

$\therefore$ ③正确 .

故选 C .

【标注】【知识点】含参二次函数的图象及性质

【初升高知识点】二次函数图象与性质

 根据不等式解集确定参数值

25.

2020~2021学年12月陕西西安碑林区西安建筑科技大学附属中学高二上学期月考理科 ("名校+"教育联合体) 第4题4分

★

若不等式 $ax^2 + 8ax + 21 < 0$ 的解集是 $\{x | -7 < x < -1\}$, 则 a 的值是 () .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 C

【解析】 $\because$ 不等式 $ax^2 + 8ax + 21 < 0$ 的解集是 $\{x | -7 < x < -1\}$,

$$\therefore \frac{21}{a} = -7 \times (-1) = 7 ,$$

解得 $a = 3$.

故选 C .

【标注】 【知识点】 一元二次不等式

26. 2017~2018学年上海浦东新区高一上学期期中第20题12分 ★★

若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 求 $bx^2 - ax + c < 0$ 的解集 .

【答案】 $-1 < x < \frac{1}{3}$.

【解析】 由题意得 : $\begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$, 解得 : $\begin{cases} a = a \\ b = -\frac{3}{2}a \\ c = \frac{1}{2}a \end{cases}$,

$$\text{故 } -\frac{3}{2}ax^2 - ax + \frac{1}{2}a < 0 ,$$

$$\text{故 } 3x^2 + 2x - 1 < 0 ,$$

$$\text{故 } (3x - 1)(x + 1) < 0 ,$$

$$\text{解得 : } -1 < x < \frac{1}{3} .$$

【标注】 【知识点】 一元二次不等式

27.

2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期单元测试《集合、不等式、均值不等式》第14题

★★★

不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x | \alpha < x < \beta\}$, 其中 $\beta > \alpha > 0$, 则不等式 $cx^2 - bx + a > 0$ 的解集是 () .

A. $\left\{x \mid \frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}\right\}$

B. $\left\{x \mid -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}\right\}$

C. $\left\{x \mid \frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}\right\}$

D. $\left\{x \mid -\frac{1}{\beta} < x < -\frac{1}{\alpha}\right\}$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 解集是 $0 < \alpha < x < \beta$,

$\therefore a < 0$, 且有 α, β 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根,

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a},$$

$$\therefore \alpha\beta > 0, \quad a < 0,$$

$$\therefore c < 0,$$

$$\therefore \text{不等式 } cx^2 - bx + a > 0 \text{ 可变形为: } x^2 - \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} < 0,$$

$$\text{即 } x^2 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta} < 0,$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{\alpha}\right)\left(x + \frac{1}{\beta}\right) < 0,$$

$$\therefore 0 < \alpha < \beta,$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta},$$

$$\therefore -\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{\beta},$$

$$\text{所以不等式 } cx^2 - bx + a > 0 \text{ 的解集为 } \left\{x \mid -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}\right\},$$

故选 B.

【标注】 【知识点】 一元二次不等式；一元二次方程根的分布

分类讨论解不等式

28. 2020~2021学年9月天津红桥区天津市第五中学高一上学期月考第20题12分 ★★★

已知集合 $A = \{x \mid x^2 - (3+a)x + 3a \leq 0\}$, $B = \left\{x \mid \frac{x-2}{x-1} < 0\right\}$.

求不等式 $x^2 - (3+a)x + 3a \leq 0$ 的解集.

【答案】 (1) 当 $a > 3$ 时, 不等式解为 $[3, a]$;

当 $a = 3$ 时, 不等式解为 $\{3\}$;

当 $a < 3$ 时, 不等式解为 $[a, 3]$.

【解析】 (1) 不等式 $x^2 - (3+a)x + 3a \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x-a) \leq 0$,

① 当 $a > 3$ 时, 不等式解为 $[3, a]$;

② 当 $a = 3$ 时, 不等式解为 $\{3\}$;

③ 当 $a < 3$ 时, 不等式解为 $[a, 3]$,

综上所述, 当 $a > 3$ 时, 不等式解为 $[3, a]$;

当 $a = 3$ 时, 不等式解为 $\{3\}$;

当 $a < 3$ 时, 不等式解为 $[a, 3]$.

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合; 解不等式中的分类讨论; 交、并、补集混合运算

29. 2020~2021学年10月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第19题9分 ★★★

已知关于 x 的不等式 $ax^2 - (2a+1)x + 2 < 0 (a \in \mathbf{R})$.

当 $a > 0$ 时, 求不等式的解集 .

【答案】 (1) 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 不等式解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 2\right\}$;
当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 不等式解集为 $\left\{x \mid 2 < x < \frac{1}{a}\right\}$;
当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式解无解 .

【解析】 (1) 原不等可化为: $(ax-1)(x-2) < 0$,
又 $\because a > 0$,
 $\therefore$ 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 不等式解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 2\right\}$;
当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 不等式解集为 $\left\{x \mid 2 < x < \frac{1}{a}\right\}$;
当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式解无解 .

【标注】【知识点】含字母系数的不等式; 解不等式中的分类讨论; 一元二次不等式

30. 2019~2020学年10月天津和平区天津市第二南开中学高一上学期月考第21题8分 ★★★

解关于 x 的不等式 $x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 < 0$.

【答案】 当 $a = 1$ 或 $a = -1$ 时, 不等式的解集为空集;
当 $a < -1$ 或 $0 < a < 1$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid a < x < \frac{1}{a}\right\}$;
当 $-1 < a < 0$ 或 $a > 1$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < a\right\}$.

【解析】 原不等式可化为 $(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right) < 0$, 令 $a = \frac{1}{a}$, 可得 $a = \pm 1$.
 $\therefore$ 当 $a < -1$ 或 $0 < a < 1$ 时, $a < \frac{1}{a}$,
 $\therefore a < x < \frac{1}{a}$;
当 $a = 1$ 或 $a = -1$ 时, $a = \frac{1}{a}$,
 $\therefore$ 不等式无解;
当 $-1 < a < 0$ 或 $a > 1$ 时, $a > \frac{1}{a}$,
 $\therefore \frac{1}{a} < x < a$.
综上所述, 当 $a = 1$ 或 $a = -1$ 时, 不等式的解集为空集;

当 $a < -1$ 或 $0 < a < 1$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid a < x < \frac{1}{a}\right\}$;
 当 $-1 < a < 0$ 或 $a > 1$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < a\right\}$.

【标注】【知识点】一元二次不等式

🔗 根的分布

31. 2018~2019学年山东泰安泰山区山东省泰安第一中学高一上学期期中第10题5分 ★★

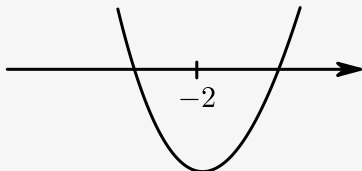
若方程 $x^2 + ax + a = 0$ 的一根小于 -2 , 另一根大于 -2 , 则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $(4, +\infty)$ B. $(0, 4)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

【答案】A

【解析】令 $f(x) = x^2 + ax + a$,

如图 :



$$f(-2) < 0 \Rightarrow 4 - 2a + a < 0 \Rightarrow a > 4 .$$

故选 A .

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；二次函数的图象及性质

32. 2016年天津和平区高三一模文科第7题5分 ★★

若方程 $x^2 + (1 - k)x - 2(k + 1) = 0$ 的一个根在区间 $(2, 3)$ 内, 则实数 k 的取值范围是 () .

- A. $(3, 4)$ B. $(2, 3)$ C. $(1, 3)$ D. $(1, 2)$

【答案】D

【解析】若方程 $x^2 + (1 - k)x - 2(k + 1) = 0$ 有两相等的实根,

则 $\Delta = (1 - k)^2 + 8(k + 1) = 0$ 解得 $k = -3$, 此时 $x = -2$, 不在区间 $(2, 3)$ 内.

令 $f(x) = x^2 + (1 - k)x - 2(k + 1)$,

若方程 $x^2 + (1 - k)x - 2(k + 1) = 0$ 有两不相等的实根, 且一个根在区间 $(2, 3)$ 内,

则 $f(2)f(3) < 0$, 即 $(4 - 4k)(10 - 5k) < 0$, 得 $1 < k < 2$.

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围

33. 2020~2021学年10月天津和平区天津市第五十五中学高一上学期月考第9题3分 ★★

- 已知关于 x 的不等式 $x^2 - 4ax + 3a^2 < 0 (a < 0)$ 的解集为 (x_1, x_2) , 则 $x_1 + x_2 + \frac{a}{x_1 x_2}$ 的最大值是 () .
- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【答案】 D

【解析】 不等式 $x^2 - 4ax + 3a^2 < 0 (a < 0)$ 的解集为 (x_1, x_2) ,

根据韦达定理 , 可得 : $x_1 x_2 = 3a^2$, $x_1 + x_2 = 4a$,

那么 : $x_1 + x_2 + \frac{a}{x_1 x_2} = 4a + \frac{1}{3a}$,

$\because a < 0$,

$\therefore -\left(4a + \frac{1}{3a}\right) \geq 2\sqrt{4a \times \frac{1}{3a}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 即 $4a + \frac{1}{3a} \leq -\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

故 $x_1 + x_2 + \frac{a}{x_1 x_2}$ 的最大值为 $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

故选 D .

【标注】 【知识点】 利用基本不等式求最值