

01幂函数以及二次函数

1. 幂函数的定义

幂函数定义

一般地， $y = x^\alpha$ 叫做**幂函数**，其中 x 是自变量， α 是常数。

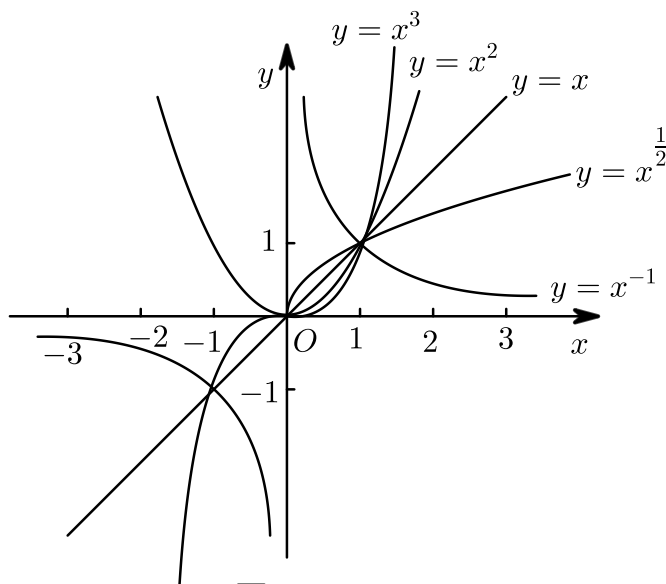


图2-3-1

判断是否幂函数

1. 下列函数中是幂函数的是 ()

A. $y = 2x^2$

B. $y = x^{\frac{1}{3}} + x^2$

C. $y = x^e$ ($e = 2.71828 \dots$)

D. $y = (x-1)^3$

利用幂函数定义求解析式

2. 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，则 $f(x)$ 的解析式为 _____。

3. 已知幂函数 $f(x) = k \cdot x^a$ 的图象过点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，则 $k + a$ 等于 _____。

4. 已知函数 $f(x)$ 是幂函数，若 $f(2) = 4$ ，则 $f(3)$ 等于 ()。

A. 9

B. 8

C. 6

D. $\sqrt{3}$

5. 如果幂函数 $f(x) = x^n$ 的图象经过点 $(2, 2\sqrt{2})$ ，则 $f(4) =$ _____。

6. 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $\left(3, \frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right)$ ，则 $f(8) =$ _____。

7. 幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $(2, m)$ ，且 $f(m) = 16$ ，则实数 m 的所有可能的值为 ()。

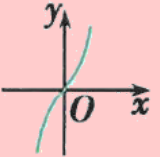
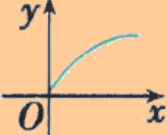
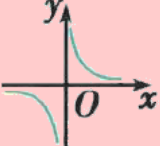
- A. 4 或 $\frac{1}{2}$ B. ± 2 C. 4 或 $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{4}$ 或 2

8. 若幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(25, 5)$ ，则 $f(x)$ 的定义域为 () .

- A. $\mathbf{R}$ B. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ C. $[0, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

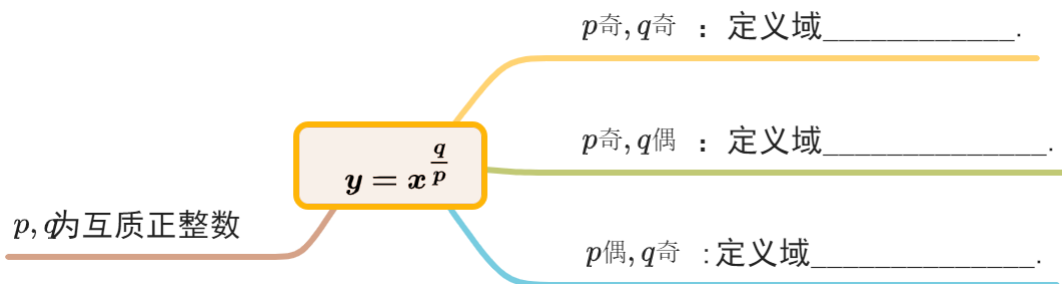
2. 幂函数的图像特征

1. 借助图像观察幂函数的特征

	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{-1}$
图像					
定义域					
值域					
奇偶性					
单调性					
定点					
所在象限					

2. 幂函数的定义域

- (1) 当幂指数取正整数时，定义域为 $\mathbf{R}$ ；
- (2) 当幂指数取零或负整数时，定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ；
- (3) 当幂指数取分数时，可以化成根式，利用根式的要求求定义域。



3. 依据图像高低判断幂指数大小

- ① 在 $(0, 1)$ 上，指数越大，幂函数图像越靠近 x 轴；

②在 $(1, +\infty)$ 上, 指数越大, 幂函数图像越远离 x 轴.

4. 幂函数的奇偶性

- ①当 n 为偶数时, $y = x^{\frac{n}{m}}$ 为 _____ ;
②当 n 为奇数, m 为奇数时, $y = x^{\frac{n}{m}}$ 为 _____ ;
③当 n 为奇数, m 为偶数时, $y = x^{\frac{n}{m}}$ 为 _____ .

特别地, 幂函数 $y = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$), 当 n 为偶数时, $y = x^n$ 为偶函数;

当 n 为奇数时, $y = x^n$ 为奇函数.

幂函数定义域

9. 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2+m-3}$, 其图象与坐标轴无交点, 则实数 m 的值为 ().

- A. 2或-1 B. 2 C. -2或1 D. -1

幂函数单调性

10. 下列幂函数在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减的是 ().

- A. $y = x$ B. $y = x^2$ C. $y = x^3$ D. $y = x^{-1}$

11. 幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象过点 $(-2, 4)$, 那么函数 $f(x)$ 单调递增区间是 ().

- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0]$ D. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

12. 已知函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2+m-3}$ 是幂函数, 且 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 是增函数, 则 m 的值为 _____ .

13. 幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m + 3)x^{m^2-m-2}$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 是减函数, 则实数 $m =$ _____ .

14. 幂函数 $f(x) = (m^2 - 6m + 9)x^{m^2-3m+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 m 的值为 ().

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 2或4

15. 已知 $y = (m^2 + m - 5)x^m$ 是幂函数, 且在第一象限是单调递减的, 则 m 的值为 ().

- A. -3 B. 2 C. -3或2 D. 3

16. “ $\alpha = 3$ ”是“ $f(x) = x^\alpha$ ”在 $(0, +\infty)$ 内单调递增”的 ().

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

幂函数奇偶性

17. 若幂函数 $y = (m^2 - 3m + 3)x^{m-2}$ 的图象关于原点对称, 则 m 的取值为 _____ .

18. 设 $\alpha \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$, 则使函数 $y = x^\alpha$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且该函数为奇函数的 α 值为 ().

- A. 1或3 B. -1或1 C. -1或3 D. -1、1或3

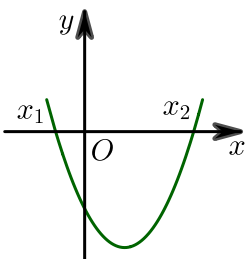
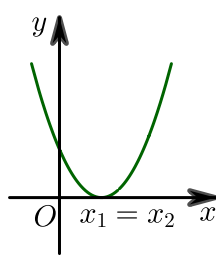
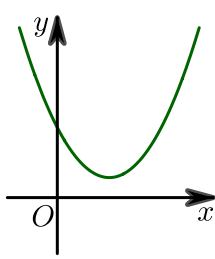
19. 已知函数 $f(x) = (m^2 + m - 1)x^{m+3}$ 是幂函数，且该函数是偶函数，则 m 的值是 _____ .
20. 幂函数 $y = f(x)$ 经过点 $(3, \sqrt{3})$ ，则 $f(x)$ 是 () .
- A. 偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
B. 偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数
C. 奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 上减函数
D. 非奇非偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

利用幂函数解不等式

21. 已知幂函数 $f(x)$ 过点 $(2, \sqrt{2})$ ，则满足 $f(2-a) > f(a-1)$ 的实数 a 的取值范围是 _____ .
22. 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 5m + 7) \cdot x^{m-1}$ 是偶函数，其中 $m \in \mathbf{R}$.
- (1) 求 m .
- (2) 解关于 x 的不等式 $f(x) \geq (a+1)x - a$ ， $a \in \mathbf{R}$.

3. 二次函数

1. 二次函数图像及对应一元二次方程根的分布

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象			
判别式的情况			
$ax^2 + bx + c = 0$ 的根			
零点个数			

2. 韦达定理

设 x_1, x_2 为方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两实根，则 _____

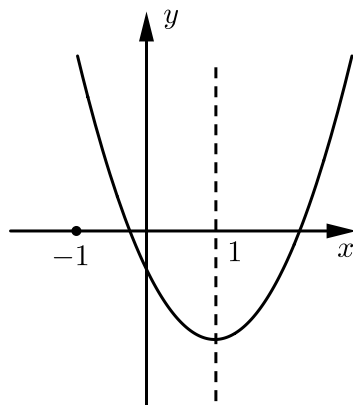
二次函数的图像和性质

23. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ，其中 $a \neq b$ ，则“ $f(2) = 4$ ”是“ $f(a) = f(b)$ ”的 () .
- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
24. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，对称轴是直线 $x = 1$. 下列结论：
- ① $abc < 0$;

② $3a + c > 0$;

③ $(a + c)^2 - b^2 < 0$.

其中结论正确的个数为 () .



A. 0个

B. 1个

C. 2个

D. 3个

根据不等式解集确定参数值

25. 若不等式 $ax^2 + 8ax + 21 < 0$ 的解集是 $\{x | -7 < x < -1\}$, 则 a 的值是 () .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

26. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 求 $bx^2 - ax + c < 0$ 的解集 .

27. 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x | \alpha < x < \beta\}$, 其中 $\beta > \alpha > 0$, 则不等式 $cx^2 - bx + a > 0$ 的解集是 () .

A. $\left\{x \mid \frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}\right\}$

B. $\left\{x \mid -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}\right\}$

C. $\left\{x \mid \frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}\right\}$

D. $\left\{x \mid -\frac{1}{\beta} < x < -\frac{1}{\alpha}\right\}$

分类讨论解不等式

28. 已知集合 $A = \{x | x^2 - (3 + a)x + 3a \leq 0\}$, $B = \left\{x \mid \frac{x-2}{x-1} < 0\right\}$.

求不等式 $x^2 - (3 + a)x + 3a \leq 0$ 的解集 .

29. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 - (2a + 1)x + 2 < 0 (a \in \mathbf{R})$.

当 $a > 0$ 时 , 求不等式的解集 .

30. 解关于 x 的不等式 $x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 < 0$.

根的分布

31. 若方程 $x^2 + ax + a = 0$ 的一根小于 -2 , 另一根大于 -2 , 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $(4, +\infty)$

B. $(0, 4)$

C. $(-\infty, 0)$

D. $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

32. 若方程 $x^2 + (1 - k)x - 2(k + 1) = 0$ 的一个根在区间 $(2, 3)$ 内 , 则实数 k 的取值范围是 () .

A. (3,4)

B. (2,3)

C. (1,3)

D. (1,2)

33. 已知关于 x 的不等式 $x^2 - 4ax + 3a^2 < 0 (a < 0)$ 的解集为 (x_1, x_2) , 则 $x_1 + x_2 + \frac{a}{x_1 x_2}$ 的最大值是 () .

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

D. $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$