

03对数运算与对数函数练习题

1. 对数运算

1. 2020~2021学年天津和平区高一上学期期末第11题4分 ★

化简 $\lg 1000 + 8^{\frac{1}{3}} - 3^{\log_3 4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】 $\lg 1000 + 8^{\frac{1}{3}} - 3^{\log_3 4}$
 $= \lg 10^3 + (2^3)^{\frac{1}{3}} - 3^{\log_3 4}$
 $= 3 + 2 - 4$
 $= 1$.

【标注】【知识点】指对化简求值

2. 2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第13题4分 ★

计算： $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \lg 25 - \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} - (-6.9)^0 + 2\lg 2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】 原式 $= \frac{4}{9} + \lg 25 - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}} - 1 + \lg 4$
 $= \frac{4}{9} + \lg 100 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - 1$
 $= \frac{4}{9} + 2 - \frac{4}{9} - 1$
 $= 1$.

【标注】【知识点】实数指数幂运算；对数的运算

3. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第12题4分 ★★

$\lg \frac{5}{8} + \log_{\frac{1}{4}} 2 + 4\lg 2 + e^{2\ln 2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】 $\lg \frac{5}{8} + \log_{\frac{1}{4}} 2 + 4\lg 2 + e^{2\ln 2}$
 $= \lg \frac{5}{8} + \lg 2^4 + \lg_4 2 + (e^{\ln 2})^2$
 $= \lg 10 - \frac{1}{2} + 2^2$

$$= 1 - \frac{1}{2} + 4$$

$$= \frac{9}{2}.$$

【标注】【知识点】利用换底公式求值

4. 2020~2021学年12月天津河西区天津市海河中学高一上学期月考第9题 ★

计算 $0.25^{\frac{1}{2}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \frac{1}{2}\lg 25 + \lg 2 - \log_2 9 \times \log_3 2$.

【答案】(1) $-\frac{7}{8}$.

【解析】(1) $0.25^{\frac{1}{2}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \frac{1}{2}\lg 25 + \lg 2 - \log_2 9 \times \log_3 2$

$$= 0.5 \times \frac{1}{4} + \lg 5 + \lg 2 - 2\log_2 3 \cdot \log_3 2$$

$$= \frac{1}{8} + 1 - 2$$

$$= -\frac{7}{8}.$$

【标注】【知识点】实数指数幂运算；对数的运算；利用诱导公式化简

5. 2020~2021学年天津东丽区高一上学期期末第13题5分 ★★

计算： $\log_3 5 - \log_3 15 + \sqrt[4]{(3-\pi)^4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\pi - 4$

【解析】原式 $= \log_3 \frac{5}{15} + (\pi - 3)$

$$= \log_3 3^{-1} + \pi - 3$$

$$= \pi - 4.$$

故答案为： $\pi - 4$.

【标注】【知识点】指对化简求值

2. 对数函数的图像与性质

定义

6. 2018~2019学年天津蓟县高一上学期期中第2题4分 ★★

函数 $f(x) = \lg(2x - 3)$ 的定义域是 ().

- A. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ C. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

【答案】 C

【解析】 要使函数 $f(x) = \lg(2x - 3)$ 有意义, 必须 $2x - 3 > 0$,

$$\therefore x > \frac{3}{2},$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \lg(x - 2)$ 的定义域是: $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

故选 C.

【标注】 【知识点】 求具体函数 (包括复合函数) 的定义域; 复合函数

7. 2018~2019 学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第3题4分 ★★

函数 $f(x) = \frac{1}{1-x} + \lg(1+x)$ 的定义域是 ().

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$

【答案】 C

【解析】 $f(x) = \frac{1}{1-x} + \lg(1+x)$,

分母不为 0, 则 $1-x \neq 0$,

又 $1+x > 0$,

得 $x > -1$ 且 $x \neq 1$,

$\therefore x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

故选 C.

【标注】 【知识点】 求具体函数 (包括复合函数) 的定义域

 过定点

8. 2018~2019 学年山东青岛李沧区青岛第五十八中学高一上学期期中第7题5分 ★★

函数 $f(x) = 4 + \log_a(x-2)$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象恒过定点 P , 则 P 点的坐标是 ().

- A. $(3, 6)$ B. $(4, 2)$ C. $(3, 4)$ D. $(3, 5)$

【答案】 C

【解析】 $\because \log_a 1 = 0$,

$\therefore x - 2 = 1$ 即 $x = 3$ 时,

$f(x)$ 恒过 $(3, 4)$ 点,

即 P 点坐标为 $(3, 4)$.

故选 C.

【标注】 【知识点】 对数函数恒过定点问题

9. 2017~2018学年陕西西安雁塔区唐南中学高一上学期期中第13题4分 ★★

函数 $y = \log_a(x+2) + 1$ ($a > 0, a \neq 1$) 恒过定点 _____ .

【答案】 $(-1, 1)$

【解析】 已知函数 $y = 1 + \log_a(x+2)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) ,

令 $x+2=1$, $y=1+\log_a 1=1$,

此时 $x=-1$, $y=1$,

$\therefore$ 函数 $y = 1 + \log_a(x+2)$ 恒过定点 $(-1, 1)$.

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 对数函数恒过定点问题

10. 2017~2018学年河南郑州金水区河南省实验中学高一上学期期中第14题5分 ★★

已知函数 $y = \log_a \frac{2x+1}{x-1}$ 的图象恒过点 P , 则点 P 的坐标为 _____ .

【答案】 $(-2, 0)$

【解析】 由 $\log_a 1 = 0$ 得 $\begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$,

故 $y = \log_a \frac{2x+1}{x-1}$ 的图象恒过点 $P(-2, 0)$.

【标注】 【知识点】 对数函数恒过定点问题

🗯 比较大小

11. 2018~2019学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第3题 ★★

若 $a = \log_2 \frac{1}{6}$, $b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$, $c = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$, 则 () .

A. $b > a > c$

B. $a > b > c$

C. $a > c > b$

D. $b > c > a$

【答案】 D

【解析】 因为 $a = \log_2 \frac{1}{6} < 0$, $b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} > 1$, $c = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$,

所以 $b > c > a$.

故选 : D .

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小 ; 指数函数的图象及性质 ; 对数函数的图象及性质

12. 2020~2021学年天津滨海新区高一上学期期末第16题5分 ★★

设 $a = 0.2^{0.4}$, $b = \log_3 0.4$, $c = \log_3 4$, 则 a , b , c 的大小关系为 ____ . (用“ $<$ ”连接)

【答案】 $b < a < c$

【解析】 $\because a = 0.2^{0.4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{0.4}$,

$\therefore 0 < a < 1$,

$b = \log_3 0.4 < 0$, $c = \log_3 4 > 1$,

$\therefore b < a < c$ (考查对数函数、指数函数的值域大小关系) .

【标注】【知识点】指对幂比较大小

13. 2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第5题4分 ★★

已知 $a = \log_{0.2} 2$, $b = 3^{0.3}$, $c = \log_3 2$, 则 () .

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $b < c < a$

【答案】 B

【解析】 $\because y = \log_{0.2} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单减 ,

$\therefore \log_{0.2} 2 < \log_{0.2} 1 = 0$,

$\therefore a < 0$,

$\because y = 3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增 ,

$\therefore 3^{0.3} > 3^0 = 1$,

$\therefore b > 1$,

$\because y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增 ,

$\therefore \log_3 1 < \log_3 2 < \log_3 3$,

$\therefore 0 < c < 1$,

$\therefore a < c < b$.

故选 B .

【标注】【知识点】指对幂比较大小

14. 2020~2021学年天津武清区武清区杨村第一中学高一上学期期末 (六校联考) 第5题4分 ★★

设 $a = \log_{0.5} 0.6$, $b = \log_{0.6} 1.2$, $c = 1.2^{0.6}$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系为 () .

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $c < a < b$

D. $b < c < a$

【答案】 B

【解析】 $\because \log_{0.5} 1 < \log_{0.5} 0.6 < \log_{0.5} 0.5$,

$$\therefore 0 < a < 1,$$

$$\text{又} \because b = \log_{0.6} 1.2 < \log_{0.6} 1 = 0, \quad c = 1.2^{0.6} > 1,$$

$$\therefore c > a > b.$$

故选 B.

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小

15. 2020~2021学年天津高一上学期期末 (部分区) 第5题4分 ★★

已知 $a = 2^{0.3}$, $b = \log_{0.3} 2$, $c = \log_{0.2} 0.3$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $c < b < a$

B. $b < c < a$

C. $a < b < c$

D. $c < a < b$

【答案】 B

【解析】 $\because 2^{0.3} > 2^0 = 1, \log_{0.3} 2 < \log_{0.3} 1 = 0$,

$$0 = \log_{0.2} 1 < \log_{0.2} 0.3 < \log_{0.2} 0.2 = 1,$$

$$\therefore b < c < a$$

故选: B.

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小

16. 2020~2021学年天津东丽区高一上学期期末第4题5分 ★★

设 $a = 1.1^{0.3}$, $b = 0.9^{3.1}$, $c = \log_3 0.2$, 则 a, b, c 大小关系正确的是 ().

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

C. $b > c > a$

D. $c > b > a$

【答案】 A

【解析】 因为 $1.1^{0.3} > 1.1^0 = 1$, 所以 $a > 1$;

因为 $0 < 0.9^{3.1} < 0.9^0 = 1$, 所以 $0 < b < 1$;

因为 $\log_3 0.2 < \log_3 1 = 0$, 所以 $c < 0$,

所以 $a > b > c$.

故选 A.

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小

17. 2017年天津河北区高三一模文科第1题5分 ★

设集合 $A = \{x|y = \lg(x-3)\}$, $B = \{y|y = 2^x, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cup B$ 等于 () .

- A. $\emptyset$ B. $\mathbf{R}$ C. $\{x|x > 1\}$ D. $\{x|x > 0\}$

【答案】 D

【解析】 集合 $A = \{x|y = \lg(x-3)\} = \{x|x-3 > 0\} = \{x|x > 3\}$,

$$B = \{y|y = 2^x, x \in \mathbf{R}\} = \{y|y > 0\},$$

则 $A \cup B = \{x|x > 0\}$.

故选 D.

【标注】 【知识点】 并集

赋值运算

18. 2020~2021学年12月天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高一上学期月考第3题5分 ★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & (x > 0) \\ 3^x, & (x \leq 0) \end{cases}$ 则 $f\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]$ 的值是 () .

- A. 9 B. 16 C. $\frac{1}{9}$ D. -2

【答案】 C

【解析】 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2$,

$$f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9},$$

$$\therefore f\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right] = f(-2) = \frac{1}{9}.$$

故选 C.

【标注】 【知识点】 函数求值问题

19. 2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第12题4分 ★★

设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数, 若当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) = \log_2(x+1)$, 则 $f(-7) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】 $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数,

$$\therefore f(-7) = f(7),$$

$\because$ 当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) = \log_2(x+1)$,

$$\therefore f(7) = \log_2(7+1) = 3,$$

$$\therefore f(-7) = f(7) = 3.$$

故答案为：3 .

【标注】【知识点】函数奇偶性的运算

分段函数单调性

20. 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期末第6题3分 ★★

已知 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x < 1 \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，那么 a 的取值范围是 () .

- A. $(0, 1)$ B. $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ D. $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right)$

【答案】 B

【解析】 由题意得 $\begin{cases} 3a-1 < 0 \\ 3a-1+4a \geq 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$,

解得 $\frac{1}{7} \leq a < \frac{1}{3}$.

故选 B .

【标注】【知识点】分段函数单调性；分段函数

复合函数单调性

21. 2019~2020学年四川绵阳涪城区高一上学期期中 ★★★

函数 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2x - 3)$ 的单调增区间为 ____ .

【答案】 $(-\infty, -3)$

【解析】 解： $x^2 + 2x - 3 > 0$, 解得 $x < -3$ 或 $x > 1$,

令 $U = x^2 + 2x - 3$, 在 $x < -3$ 时递减，在 $x > 1$ 时递增，

又 $y = \log_{\frac{1}{3}} u$ 单调递减，

由复合函数的单调性可知：原函数的单调增区间是 $(-\infty, -3)$.

故答案为： $(-\infty, -3)$.

【标注】【知识点】对数函数的图象及性质

22. 2018~2019学年天津蓟县高一上学期期中第15题4分 ★★

函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)$ 的单调递减区间是 ____ .

【答案】 $(0, +\infty)$

【解析】 $\because$ 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)$,

$$\therefore x^2 + 1 > 0,$$

解得 $x \in \mathbf{R}$,

$\therefore t = x^2 + 1$ 是开口向上, 对称轴为 $x = 0$ 的抛物线,

$\therefore$ 由复合函数的性质知函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)$ 的单调递减区间是 $(0, +\infty)$.

故答案为: $(0, +\infty)$.

【标注】【知识点】求单调区间

23. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第7题4分 ★★

函数 $f(x) = \log_3(6 - x - x^2)$ 的单调递增区间是 ().

- A. $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ C. $\left(-3, -\frac{1}{2}\right]$ D. $\left[-\frac{1}{2}, 2\right)$

【答案】C

【解析】由 $6 - x - x^2 > 0$, 可得 $-3 < x < 2$,

函数 $f(x) = \log_3(6 - x - x^2)$ 的定义为 $(-3, 2)$,

令 $t = 6 - x - x^2$, 则 $y = \log_3 t$,

$\therefore y = \log_3 t$ 为增函数,

$t = 6 - x - x^2$ 的单调递增区间是 $\left(-3, -\frac{1}{2}\right]$, 单调递减区间是 $\left[-\frac{1}{2}, 2\right)$,

故函数 $f(x) = \log_3(6 - x - x^2)$ 的单调递增区间是 $\left(-3, -\frac{1}{2}\right]$,

故选: C.

【标注】【知识点】判断复合函数单调性