

03对数运算与对数函数

1. 对数运算

1.对数的定义

一般地, 如果 $a^b = N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$),

那么 b 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作 $b = \log_a N$,

其中 a 叫做对数的**底数**, N 叫做**真数**.

2.两个特殊的对数

(1) **常用对数**: 以**10为底**的对数; N 的常用对数 $\log_{10} N$ 简记为 $\lg N$.

(2) **自然对数**: 以**e为底**的对数; N 的自然对数 $\log_e N$ 简记为 $\ln N$.

3.对数的性质

对数 $\log_a N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 具有如下性质:

①负数和零没有对数, 即 $N > 0$.

②1的对数是0, 即 $\log_a 1 = 0$ ($\because a^0 = 1$).

③底的对数是1, 即 $\log_a a = 1$ ($\because a^1 = a$).

④对数恒等式: 如果把 $a^b = N$ 中的 b 写成 $\log_a N$, 那么 $a^{\log_a N} = N$, 同理 $\log_a a^b = b$.

4.对数的运算公式

如果 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 那么:

(1) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$, 即积的对数等于对数的和.

推广: $\log_a (N_1 N_2 \cdots N_K) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \cdots + \log_a N_K$.

(2) $\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$, 即商的对数等于对数的差.

(3) $\log_a M^n = n \log_a M$ ($n \in \mathbf{R}$).

5.对数换底公式

$\log_N M = \frac{\log_a M}{\log_a N}$, 由此可得:

(1) $\log_N M \cdot \log_M N = 1$.

(2) $\log_{N^m} M^n = \frac{n}{m} \log_N M$.

(3) $\log_N M = \frac{\log_a M}{\log_a N} = \frac{\log_b M}{\log_b N}$.

由(3)可得:

(4) $\log_a M \cdot \log_b N = \log_a N \cdot \log_b M$.

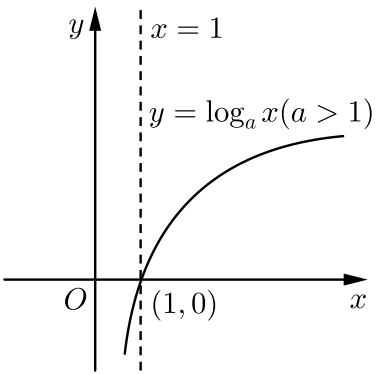
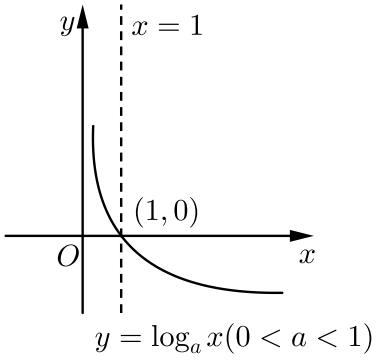
对数运算

- 已知 e 为自然对数的底数, 计算: $2^{\frac{1}{4}} \times 8^{0.25} + \lg \frac{1}{100} + 2 \ln \sqrt{e} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 已知 $\log_2 [\log_3 (\log_4 x)] = 0$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.
- $\log_2 3 \cdot \log_3 4 + \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times \sqrt[3]{8}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 计算或化简:
 - $\log_3 \sqrt{27} - \log_3 2 \cdot \log_2 3 - 2^{\log_2 3} + \lg \sqrt{2} + \lg \sqrt{5}$.
 - $(\lg 2)^2 + \lg 20 \cdot \lg 5 + \log_9 2 \cdot \log_4 3$.
- 已知 $\lg a, \lg b$ 是方程 $6x^2 - 4x - 3 = 0$ 的两根, 则 $\left(\lg \frac{b}{a}\right)^2$ 等于 ().

A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{13}{9}$ C. $\frac{14}{9}$ D. $\frac{22}{9}$
- 已知 $2 \lg(x - 2y) = \lg x + \lg y$, 则 $\frac{x}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 已知 $2^a = 6, 3^b = 36$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

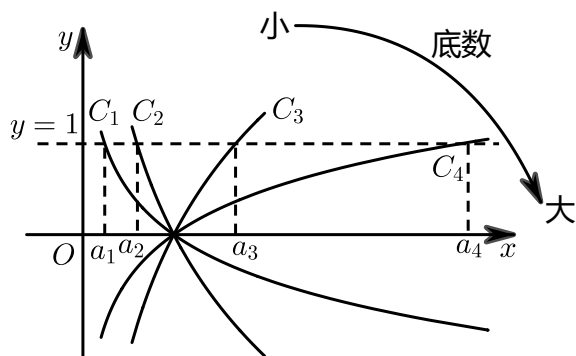
2. 对数函数的图像与性质

1. 对数函数的图像及性质 $y = \log_a x$

a		
图像		
定义域		
值域		
定点		
单调性		

2. 底数对对数函数图像的影响

(1)当 $x > 1$ 时 “底大图低” ; 当 $0 < x < 1$ 时 “底大图高” .



(2)在同一坐标系中, $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象关于 x 轴对称.

定义域

8. 函数 $f(x) = \sqrt{2-x} + \lg(3x+1)$ 的定义域是 ().
- A. $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ B. $\left[-2, \frac{1}{3}\right)$ C. $\left(-\frac{1}{3}, 2\right]$ D. $(-\infty, 2]$
9. 函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域为 ().
- A. $(-4, -1)$ B. $(-4, 1)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, 1]$
10. 若 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}}$, 则 $f(x)$ 的定义域为 _____.
11. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x - 1}}{3x-1}$ 的定义域是 ().
- A. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 2\right]$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

定点

12. 函数 $f(x) = \log_a(x-1) + 2$ ($a > 0, a \neq 1$) 恒过定点是 ().
- A. $(2, 2)$ B. $(2, 3)$ C. $(1, 0)$ D. $(2, 1)$
13. 函数 $y = \log_a(x-1) + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 若点 A 在一次函数 $y = mx + n$ 的图象上, 其中 $m > 0, n > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 _____.

比较大小

14. 已知 $a = 0.3^2, b = \log_2 0.3, c = 2^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().
- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$
15. 已知 $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}, c = \log_3 \frac{1}{2}$, 则从小到大排列为 _____.
16. 若 $a = \log_2 3, b = \log_3 2, c = \log_4 6$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

17. 已知 $a = \log_2 \sqrt{5}$, $b = \log_5 \sqrt{2}$, $c = 3^{-0.5}$, 则 () .

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

18. 已知 $a = \log_2 4.1$, $b = 2^{0.8}$, $c = 0.5^{-2.7}$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

- A. $b < a < c$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $a < b < c$

19. 已知 $a = 1.9^{0.4}$, $b = \log_{0.4} 1.9$, $c = 0.4^{19}$, 则 () .

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

20. 设 $a = \log_{0.5} 0.6$, $b = \log_{0.6} 1.2$, $c = 1.2^{0.6}$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

21. 已知函数 $f(x) = |\lg x|$, 若 $a = f\left(\frac{1}{4}\right)$, $b = f\left(\frac{1}{3}\right)$, $c = f(2)$, 则 () .

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $a > c > b$

解不等式

22. 已知集合 $A = \{y | y = \log_2 x, x > 1\}$, $B = \left\{y | y = \frac{1}{2^x}, x > 1\right\}$, 则 $A \cap B =$ () .

- A. $\left\{y | 0 < y < \frac{1}{2}\right\}$ B. $\{y | 0 < y < 1\}$ C. $\left\{y | \frac{1}{2} < y < 1\right\}$ D. $\emptyset$

23. 已知 $A = \{x | 2^x - 16 \leq 0\}$, $B = \{x | \log_2(x-1) \geq 1\}$, 则 $A \cap B =$ () .

- A. $[3, 4]$ B. $[-2, 4]$ C. $[-2, +\infty)$ D. $[2, 3]$

24. 设 $p: \log_2 x < 0$, $q: 2^{x-1} < 1$, 则 p 是 q 的 () .

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

赋值运算

25. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (-x)^{\frac{1}{2}}, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f\left(f\left(\frac{1}{16}\right)\right)$ 的值为 () .

- A. 1 B. $2^{\frac{1}{2}}$ C. 2 D. 4

26. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = 5^{-x} - 1$, 则 $f(\log_{49} 9 \cdot \log_5 7)$ 的值为 () .

- A. -4 B. -2 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

27. 已知函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 1$, 若实数 a 满足 $f(-a) = 2$, 则 $f(a)$ 等于 () .

- A. 1 B. 0 C. -1 D. -2

3. 对数函数综合问题



分段函数单调性

28. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2a-1)x+a, & x \geq 2 \\ \log_a(x-1), & 1 < x < 2 \end{cases}$ 是 $(1, +\infty)$ 上的减函数, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $\left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(0, \frac{2}{5}\right]$ D. $\left(0, \frac{1}{5}\right]$

复合函数单调性

29. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(6+x-2x^2)$ 的单调递增区间是 ().
- A. $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{1}{4}, 2\right)$ C. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right]$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$
30. 函数 $y = \log_{0.5}(9-x^2)$ 的单调递减区间为 ____.
31. 已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - ax + 3a)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上是减函数, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, 4]$ B. $(-\infty, 4)$ C. $(-4, 4]$ D. $[-4, 4]$
32. 若函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 4x + 5)$ 在区间 $(3m-2, m+2)$ 内单调递增, 则实数 m 的取值范围为 ____.
33. 若函数 $f(x) = \log_{0.3}(5+4x-x^2)$ 在区间 $(a-1, a+1)$ 上单调递减, 且 $b = \log_2 0.1$, $c = 2^{0.2}$, 则 ().
- A. $c < b < a$ B. $b < c < a$ C. $a < b < c$ D. $b < a < c$

对数函数与函数性质综合

34. 若 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 又有 $f(-2) = 0$, 则 $(\log_2 x - 1) \cdot f(\log_2 x - 1) < 0$ 的解集是 ____.
35. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 若实数 a 满足 $f(\log_3 a) < f(1)$, 则 a 的取值范围是 ().
- A. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ B. $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ C. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ D. $(3, +\infty)$
36. 已知函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 若实数 a, b 满足 $f(a) + f(b-2) = 0$, 则 $a+b =$ ().
- A. -2 B. -1 C. 0 D. 2
37. 已知函数 $f(x) = -\ln x^2 - |x|$, 则关于 m 的不等式 $f\left(\frac{1}{m}\right) < 2\left(\ln \frac{1}{2} - 1\right)$ 的解集为 ().
- A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$ C. $(0, 2)$ D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$
38. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 若实数 a 满足 $f(\log_2 a) + f(\log_{0.5} a) \leq 2f(1)$, 则 a 的最小值是 ().
- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

