

05基本不等式3练习题

换元法

1. 若 $x > 0$, $y > -2$, 且 $x + y = 1$, 则 $\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{y^2}{y + 2}$ 的最小值为().
- A. 8 B. 3 C. 2 D. $\frac{13}{5}$

【答案】 C

【解析】 设 $y + 2 = A$,

$$\because y > -2,$$

$$\therefore A > 0,$$

$$\text{又} \because x + y = 1,$$

$$\therefore x + A = 3,$$

$$\text{原式} = \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{(A - 2)^2}{A},$$

$$= x + \frac{1}{x} + A + \frac{4}{A} - 4,$$

$$= (x + A) - 4 + \frac{1}{x} + \frac{4}{A},$$

$$= -1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{A},$$

$$\therefore (x + A) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{A} \right) = 1 + 4 + \frac{4x}{A} + \frac{A}{x} \geq 5 + 4 = 9,$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{4}{A} \geq 3,$$

$$\therefore \text{原式} \geq 2,$$

当且仅当 $A = 2x$ 时, 即 $x = 1, y = 0$ 时取得最小值.

故选C.

【标注】【知识点】已知等式关系求最值

2. 对任意的实数 $x > 1, y > \frac{1}{2}$, 不等式 $p \leq \frac{x^2}{2y - 1} + \frac{4y^2}{x - 1}$ 恒成立, 则实数 p 的最大值为 ____.

【答案】 8

【解析】 设 $a = 2y - 1, b = x - 1$,

$$\because x > 1, y > \frac{1}{2},$$

$$\therefore a > 0, b > 0, x = b + 1, y = \frac{a + 1}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{则} & \frac{x^2}{2y - 1} + \frac{4y^2}{x - 1} \\ &= \frac{(b + 1)^2}{a} + \frac{(a + 1)^2}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq 2 \frac{(a+1)(b+1)}{\sqrt{ab}} \\
&= 2 \cdot \frac{ab + (a+b) + 1}{\sqrt{ab}} \\
&= 2 \left(\sqrt{ab} + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \right) \\
&\geq 2 \times \left(2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}}} + \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} \right) \\
&= 2(2+2) \\
&= 8,
\end{aligned}$$

当且仅当 $a = b = 1$ ，即 $x = 2, y = 1$ 时取“=”，

$\therefore p \leq 8$ ，

即 p 的最大值为 8。

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用；基本不等式与恒成立问题

3. 已知 $xy > 0, x + y = 3$ ，则 $\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+2}$ 的最小值为 _____。

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】 方法一：原式 $= \left(\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+2} \right) [(y+1) + (x+2)] \times \frac{1}{6}$
 $= \left[x^2 + y^2 + \frac{x^2(x+2)}{y+1} + \frac{y^2(y+1)}{x+2} \right] \times \frac{1}{6}$
 $\geq \frac{1}{6} \times (x^2 + y^2 + 2xy)$
 $= \frac{1}{6} \times (x+y)^2$
 $= \frac{3}{2}.$

故答案为： $\frac{3}{2}$ 。

方法二： $xy > 0, x + y = 3$ ，可得 $x > 0, y > 0$ ，

由柯西不等式可得

$$\begin{aligned}
&[(y+1) + (x+2)] \left(\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+2} \right) \geq \left[\sqrt{y+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{y+1}} + \sqrt{x+2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x+2}} \right]^2 \\
&= (x+y)^2 = 9,
\end{aligned}$$

$$\text{可得 } \frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+2} \geq \frac{9}{x+y+3} = \frac{3}{2},$$

$$\text{当 } \frac{y+1}{x} = \frac{x+2}{y},$$

$$\text{即有 } x = \frac{4}{3}, y = \frac{5}{3} \text{ 时,}$$

$$\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+2} \text{ 最小值为 } \frac{3}{2},$$

故答案为： $\frac{3}{2}$ 。

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

 配凑法

4. 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $4x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $2x + y$ 的最大值是 _____ .

【答案】 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

【解析】 由 $4x^2 + y^2 + xy = 1$ 知 $\left(y + \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2 = 1$,

$$\text{设 } y + \frac{1}{2}x = \cos \theta, \quad \frac{\sqrt{5}}{2}x = \sin \theta,$$

$$\text{则 } x = \frac{2}{\sqrt{15}}\sin \theta, \quad y = \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{15}}\sin \theta,$$

$$\text{则 } 2x + y = \frac{4}{\sqrt{15}}\sin \theta + \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{15}}\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{5}\sin \theta + \cos \theta =$$

$$= \frac{2\sqrt{10}}{5}\sin(\theta + \varphi) \cdot \varepsilon \frac{2\sqrt{10}}{5},$$

$$\text{且 } \tan \varphi = \frac{\sqrt{15}}{3}, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore 2x + y \text{ 的最大值为 } \frac{2\sqrt{10}}{5},$$

$$\text{此时 } \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi, \text{ 故 } \tan \theta = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

$$\text{则 } \sin \theta = \sqrt{\frac{15}{40}} = \frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{25}{40}} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\text{则 } x = \frac{2}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad y = \frac{\sqrt{10}}{4} - \frac{1}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

【标注】【素养】逻辑推理

【知识点】基本不等式的实际应用

5. 设函数 $y = ax^2 + 4x + b$.

已知 $a > b$, 若 $y \geq 0$ 对于一切实数 x 恒成立, 并且存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $ax_0^2 + 4x_0 + b = 0$ 成立,

求 $\frac{4a^2 + b^2}{2a - b}$ 的最小值.

【答案】 (1) 8 .

【解析】 (1) $\because ax^2 + 4x + b \geq 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

又 $\because \exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $ax_0^2 + 4x_0 + b = 0$ 成立,

$$\therefore \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases},$$

$$\therefore 16 - 4ab = 0,$$

$$\therefore ab = 4,$$

$$\therefore a > b,$$

$$\text{又 } \because a > 0,$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore 2a - b > 0, \\
 &\therefore \frac{4a^2 + b^2}{2a - b} = \frac{(2a - b)^2 + 4ab}{2a - b}, \\
 &= 2a - b + \frac{16}{2a - b}, \\
 &\geq 2\sqrt{16} = 8,
 \end{aligned}$$

当且仅当 $2a - b = 4$ 时取得最小值.

【标注】【知识点】二次函数相关的恒成立问题；利用基本不等式求最值

6. 已知函数 $f(x) = |\lg x|$, $a > b > 0$, $f(a) = f(b)$. 则 $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 由函数 $f(x) = |\lg x|$, $a > b > 0$, $f(a) = f(b)$,

可知 $a > 1 > b > 0$,

所以 $\lg a = -\lg b$, $b = \frac{1}{a}$, $a - b = a - \frac{1}{a} > 0$,

$$\text{则 } \frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2}{a - \frac{1}{a}} = \frac{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2}{a - \frac{1}{a}} = a - \frac{1}{a} + \frac{2}{a - \frac{1}{a}} \geq 2\sqrt{2},$$

(当且仅当 $a - \frac{1}{a} = \frac{2}{a - \frac{1}{a}}$, 即 $a = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ 时, 等号成立).

综上所述可得: $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】倒数和形式；利用基本不等式求最值

通分法

7. 若正数 a, b 满足: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$, 则 $\frac{2}{a-1} + \frac{1}{b-2}$ 的最小值为 ().

A. 2

B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{5}{2}$

D. $1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}$

【答案】 A

【解析】 正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$,

$$\text{则 } \frac{1}{a} = 1 - \frac{2}{b} = \frac{b-2}{b}, \text{ 或 } \frac{2}{b} = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a},$$

$$\text{则 } \frac{1}{b-2} = \frac{a}{b},$$

由正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$,

$$\text{则 } \frac{2}{b} = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a},$$

$$\text{则 } \frac{2}{a-1} = \frac{b}{a},$$

$$\frac{2}{a-1} + \frac{1}{b-2} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2,$$

当且仅当 $a = b = 3$ 时取等号，故 $\frac{2}{a-1} + \frac{1}{b-2}$ 的最小值为 2，

故答案为：A .

【标注】【知识点】基本不等式的概念；倒数和形式