

## 04基本不等式2

### 1. 一个参数的均值考查形式

 直接使用基本不等式

**【备注】**【教师备注】与第一讲的差别在于——此处考察是**含参**的问题，难度适中

1. 已知函数  $f(x) = -\frac{1}{a} + \frac{2}{x} (x > 0)$  .

若  $f(x) + 2x \geq 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立，求  $a$  的取值范围 .

**【备注】**【教师备注】归根结底其实是**解分式不等式**

**【答案】** ( 1 )  $a < 0$  或  $a \geq \frac{1}{4}$  .

**【解析】** ( 1 )  $\because f(x) + 2x \geq 0$  , 在  $(0, +\infty)$  上恒成立 ,

$$\therefore \frac{2}{x} + 2x \geq \frac{1}{a} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立 ,}$$

$$\therefore \frac{1}{a} \leq \left( \frac{2}{x} + 2x \right)_{\min} ,$$

$$\because x > 0 ,$$

$$\therefore \frac{2}{x} + 2x \geq 2\sqrt{\frac{2}{x} \cdot 2x} = 4 ,$$

$$\therefore \frac{1}{a} \leq 4 ,$$

$$\therefore a < 0 \text{ 或 } a \geq \frac{1}{4} .$$

**【标注】**【知识点】用定义法证明函数的单调性；基本不等式的实际应用；基本不等式与恒成立问题

2. 若对任意的  $x$  大于 0 , 不等式  $x^2 - ax + 2 > 0$  恒成立，则实数  $a$  的取值范围为 ( ) .

A.  $a < 2\sqrt{2}$

B.  $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

C.  $a > 2\sqrt{2}$

D.  $a < -2\sqrt{2}$  或  $a > 2\sqrt{2}$

**【备注】**【教师备注】初步建立**分参思想**

**【答案】** A

**【解析】**  $\because x^2 - ax + 2 > 0$  时  $\forall x \in (0, +\infty)$  恒成立 ,

$$\therefore a < x + \frac{2}{x} \text{ 对 } \forall x \in (0, +\infty) \text{ 恒成立 ,}$$

$$\therefore a < \left( x + \frac{2}{x} \right)_{\min} ,$$

$$x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2},$$

当 $x = \sqrt{2}$ 时, 取得最小值,

$$\therefore a < 2\sqrt{2}.$$

故选: A.

**【标注】**【知识点】基本不等式与恒成立问题

3. 当 $x \in (1, 3)$ 时, 不等式 $x^2 - mx + 4 > 0$ 恒成立, 则实数 $m$ 的取值范围是 \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $(-\infty, 4)$

**【解析】** 当 $x > 0$ 时, 不等式 $x^2 - mx + 4 > 0$ 恒成立

$$\Leftrightarrow \text{当 } x > 0 \text{ 时, 不等式 } m < x + \frac{4}{x} \text{ 恒成立} \Leftrightarrow m < \left(x + \frac{4}{x}\right)_{\min},$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4 \text{ (当且仅当 } x = 2 \text{ 时取“=”)},$$

$$\text{因此 } \left(x + \frac{4}{x}\right)_{\min} = 4, \text{ 所以 } m < 4.$$

故答案为:  $(-\infty, 4)$ .

**【标注】**【知识点】二次函数相关的恒成立问题; 基本不等式与恒成立问题

4. 已知当 $0 < x \leq 2$ 时,  $x^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 恒成立, 则实数 $a$ 的取值范围是 ( ).

A.  $\left\{a \mid 1 \leq a \leq \frac{5}{4}\right\}$

B.  $\{a \mid -1 \leq a \leq 1\}$

C.  $\{a \mid a \leq 1\}$

D.  $\left\{a \mid a \leq \frac{5}{4}\right\}$

**【答案】** C

**【解析】**  $\because x^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 对 $\forall x \in (0, 2]$ 恒成立,

$$\therefore 2a \leq \left(x + \frac{1}{x}\right)_{\min},$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2,$$

当 $x = 1$ 时“=”取得,

$$\therefore 2a \leq 2,$$

$$\therefore a \leq 1,$$

故选C.

**【标注】**【知识点】基本不等式与恒成立问题

5. 若  $0 < a < \frac{1}{2}$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_ 时,  $a(1 - 2a)$  的最大值是 \_\_\_\_\_ .

【备注】【教师备注】配凑乘2后可直接利用基本不等式

【答案】  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{8}$

【解析】  $a(1 - 2a)$   
 $= 2a \cdot (1 - 2a) \times \frac{1}{2}$   
 $= \frac{1}{2} \left( \frac{2a + 1 - 2a}{2} \right)^2$   
 $= \frac{1}{8},$   
 当且仅当  $2a = 1 - 2a$  即  $a = \frac{1}{4}$  时.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

### 配凑法 (加减常数)

6.  $y = 3x^2 + \frac{16}{2 + x^2}$  的最小值为 ( )

A.  $8 - 2\sqrt{2}$

B. 8

C.  $8\sqrt{3}$

D.  $8\sqrt{3} - 6$

【备注】【教师备注】注意  $x^2 + 2$  的取值范围, 及对勾函数拐点是否在定义域内

【答案】 D

【解析】  $y = 3x^2 + \frac{16}{2 + x^2} = 3(2 + x^2) + \frac{16}{2 + x^2} - 6$   
 $\geq 2\sqrt{3(2 + x^2) \cdot \frac{16}{2 + x^2}} - 6 = 8\sqrt{3} - 6,$   
 $3(2 + x^2) = \frac{16}{2 + x^2}$  即  $x^2 = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3}$  取到.

【标注】【知识点】基本不等式的概念; 利用基本不等式求最值

7. 当  $x > 1$  时, 函数  $f(x) = 2 - x - \frac{1}{x - 1}$  的最大值为 \_\_\_\_\_ .

【备注】【教师备注】负数问题一般容易出错, 但是考察次数较低, 但也要提醒学生重视起来

【答案】 -1

【解析】  $\because x > 1,$   
 $\therefore x - 1 > 0,$   
 $x + \frac{1}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1} + 1 \geq 2\sqrt{(x - 1) \frac{1}{x - 1}} + 1 = 3,$   
 $\therefore -x - \frac{1}{x - 1} \leq -3,$

$$f(x) = 2 - x - \frac{1}{x-1} \leq 2 - 3 = -1,$$

当且仅当  $x - 1 = \frac{1}{x-1}$  即  $x = 2$  时“=”取得.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

8.  $y = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$  的最小值 \_\_\_\_\_, 此时  $x =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $4; \pm\sqrt{3}$

【解析】  $y = \frac{x^2 + 1 + 4}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 4$ , 当且仅当  $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}}$  时, 即  $x = \pm\sqrt{3}$  等号成立.

【标注】【知识点】基本不等式的概念

### 💡 分式型

9. 若对任意  $x > 0$ ,  $\frac{x}{x^2 + 3x + 1} \leq a$  恒成立, 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

【备注】【教师备注】恒成立问题, 可以借助此题带学生回顾一遍恒成立与能成立分别需要求解的最值情况

【答案】  $\left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$

【解析】  $\because x > 0$ ,  
 $\therefore \frac{x}{x^2 + 3x + 1} = \frac{1}{x + 3 + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2 + 3} = \frac{1}{5}$ .  
 欲使  $\frac{x}{x^2 + 3x + 1} \leq a$  恒成立,  
 只需  $a \geq \left(\frac{x}{x^2 + 3x + 1}\right)_{\max} = \frac{1}{5}$ .  
 $\therefore a$  的取值范围是  $\left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$ .

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

## 2. 两个参数的均值考查形式

### 💡 直接使用

10. 设  $b > a > 0$ , 则下列不等式中一定成立的是 ( ).

A.  $a > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > b$   
 C.  $b > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > a$

B.  $b > \sqrt{ab} > \frac{a+b}{2} > a$   
 D.  $b > a > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

【答案】C

【解析】 $\because b > a > 0, \therefore \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ ,  
又 $\because \sqrt{ab} > \sqrt{a^2} = a, \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$ ,  
 $\therefore b > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > a$ .  
故选C.

【标注】【知识点】基本不等式成立的条件；针对不等式变形判断正误

11. 若 $ab > 0$ , 则 $\frac{a^2 + 2b^2}{ab}$ 的最小值为( )

- A.  $2\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{2}$                       C. 3                      D. 2

【答案】A

【解析】解： $\because ab > 0, \therefore \frac{a^2 + 2b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{2b}{a}} = 2\sqrt{2}$ ,  
当且仅当 $\frac{a}{b} = \frac{2b}{a}$ , 即 $a = \sqrt{2}b$ 时取等号.  
故选：A.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

12. 已知不等式 $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}\right) \geq 9$ 对任意正实数 $x, y$ 恒成立, 则正实数 $a$ 的最小值为( ).

- A. 2                      B. 4                      C. 6                      D. 8

【答案】B

【解析】 $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}\right) = 1 + a + \frac{ax}{y} + \frac{y}{x}$   
 $\geq 1 + a + 2\sqrt{a} = (\sqrt{a} + 1)^2$ , 当且仅当 $\frac{y}{x} = \sqrt{a}$ 时取等号.  
故只需 $(\sqrt{a} + 1)^2 \geq 9$ 即可, 解得 $a \geq 4$ .  
故选B.

【标注】【知识点】基本不等式成立的条件

13. 已知 $a > 0, b > 0$ , 若不等式 $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{m}{a+3b}$ 恒成立, 则 $m$ 的最大值为( ).

- A. 9                      B. 12                      C. 18                      D. 24

【答案】B

【解析】 $\because a > 0, b > 0$ ,

不等式  $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{m}{a+3b}$  恒成立,

$$\therefore m \leq \left[ (a+3b) \left( \frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]_{\min}.$$

$$\therefore (a+3b) \left( \frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right) = 6 + \frac{9b}{a} + \frac{a}{b}$$

$$\geq 6 + 2\sqrt{\frac{9b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 12, \text{ 当且仅当 } a = 3b \text{ 时取等号.}$$

$\therefore m$  的最大值为 12.

故选: B.

【标注】【知识点】基本不等式与恒成立问题

### 直接使用两次

【备注】【教师备注】注意等号成立的条件是否能够同时取到

14. 已知  $a > 0, b > 0$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2\sqrt{ab}$  的最小值是 ( )

A. 2

B.  $2\sqrt{2}$

C. 4

D. 5

【答案】C

【解析】方法一:  $\because \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} + 2\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{2 \times 2} = 4.$

当且仅当  $a = b, \sqrt{ab} = 1$  时, 等号成立, 即  $a = b = 1$  时,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2\sqrt{ab}$  取最小值 4.

方法二:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2\sqrt{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \sqrt{ab} + \sqrt{ab} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}} = 4.$  故选 C

【标注】【知识点】基本不等式的概念

15. 若  $a, b \in \mathbf{R}, ab > 0$ , 则  $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab}$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

【答案】4

【解析】方法一:  $a, b \in \mathbf{R}, ab > 0$ ,

$$\therefore \frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab} \geq \frac{2\sqrt{a^4 \cdot 4b^4} + 1}{ab} = \frac{4a^2b^2 + 1}{ab}$$

$$= 4ab + \frac{1}{ab} \geq 2\sqrt{4ab \cdot \frac{1}{ab}} = 4.$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} a^4 = 4b^4 \\ 4ab = \frac{1}{ab} \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ a^2b^2 = \frac{1}{4} \end{cases},$$

$$\text{即} a = \frac{1}{4\sqrt{2}}, b = \frac{1}{4\sqrt{8}} \text{ 或 } a = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, b = -\frac{1}{4\sqrt{8}} \text{ 时取“=”},$$

∴上式的最小值为4.

方法二:  $a, b \in \mathbf{R}, ab > 0$ ,

$$\therefore \frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab} = \frac{a^3}{b} + \frac{4b^3}{a} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab}$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{a^3}{b} \cdot \frac{4b^3}{a} \cdot \frac{1}{2ab} \cdot \frac{1}{2ab}} = 4,$$

$$\text{当且仅当} \begin{cases} a^4 = 4b^4 \\ 4ab = \frac{1}{ab} \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ a^2b^2 = \frac{1}{4} \end{cases},$$

$$\text{即} a = \frac{1}{4\sqrt{2}}, b = \frac{1}{4\sqrt{8}} \text{ 或 } a = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, b = -\frac{1}{4\sqrt{8}} \text{ 时取“=”},$$

∴上式的最小值为4.

故答案为: 4.

**【标注】**【知识点】利用基本不等式求最值

### 统一和、积形式 (知积求和、知和求积)

16. 已知  $a, b > 0, a + b = 4$ , 则下列各项中恒成立的是 ( ).

- A.  $\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{2}$
- B.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1$
- C.  $\sqrt{ab} \geq 2$
- D.  $\frac{1}{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{4}$

**【答案】** B

**【解析】** A 选项:  $\because a > 0, b > 0$ ,

$$4 = a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\therefore ab \leq 4,$$

$$\therefore \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{4},$$

故A错误;

B 选项:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq (1 + 1)^2,$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1,$$

故B正确;

C 选项： $\because ab \leq 4$ ,

$$\therefore \sqrt{ab} \leq 2,$$

故C错误；

D 选项：

$$(a^2 + b^2)(1 + 1) \geq (a + b)^2,$$

$$\therefore 2(a^2 + b^2) \geq 16,$$

$$\therefore a^2 + b^2 \geq 8,$$

$$\therefore \frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{8},$$

故D错误；

故选 B.

**【标注】**【知识点】基本不等式与恒成立问题

17. 若正实数  $a, b$  满足  $a + b = 1$ , 则 ( ) .

A.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  有最大值 4

B.  $ab$  有最小值  $\frac{1}{4}$

C.  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  有最大值  $\sqrt{2}$

D.  $a^2 + b^2$  有最小值  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**【答案】** C

**【解析】**  $\because$  正实数  $a, b$  满足  $a + b = 1$ .

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2 = 4,$$

故  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  有最小值 4, 故 A 不正确.

$$\text{由基本不等式可得 } a + b = 1 \geq 2\sqrt{ab}.$$

$$\therefore ab \leq \frac{1}{4}, \text{ 故 } ab \text{ 有最大值 } \frac{1}{4}, \text{ 故 B 不正确.}$$

$$\text{由于 } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \leq 2.$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}, \text{ 故 } \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ 有最大值为 } \sqrt{2}, \text{ 故 C 正确.}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1 - 2ab \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } a^2 + b^2 \text{ 有最小值 } \frac{1}{2}, \text{ 故 D 不正确.}$$

故选：C.

**【标注】**【知识点】基本不等式的概念

18. 若  $a > 0, b > 0, ab = a + b + 1$ , 则  $a + b$  的最小值为 ( ) .

A.  $\sqrt{2} + 1$

B.  $2\sqrt{2} - 2$

C.  $2 + 2\sqrt{2}$

D. 4

【答案】 C

【解析】  $\because a > 0, b > 0,$

$$\therefore a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\therefore (a + b)^2 \geq 4ab,$$

$$\therefore ab = a + b + 1,$$

$$\therefore (a + b)^2 \geq 4(a + b + 1),$$

$$\therefore (a + b)^2 - 4(a + b) + 4 \geq 8,$$

$$\therefore (a + b - 2)^2 \geq 8,$$

$$\therefore a + b - 2 \geq 2\sqrt{2} \text{ 或 } a + b - 2 \leq -2\sqrt{2} \text{ (不合题意, 舍去)},$$

$$\therefore a + b \geq 2 + 2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } a = b = \sqrt{2} + 1 \text{ 时取等},$$

$$\therefore a + b \text{ 的最小值为 } 2 + 2\sqrt{2}.$$

故选C.

【标注】 【知识点】 利用基本不等式求最值

19. 若正实数  $x, y$  满足  $2x + y + 6 = xy$ , 则  $xy$  的最小值是 \_\_\_\_\_.

【答案】 18

【解析】 方法一：由条件利用基本不等式可得  $xy = 2x + y + 6 \geq 2\sqrt{2xy} + 6$ ,

$$\text{令 } xy = t^2, \text{ 即 } t = \sqrt{xy} > 0, \text{ 可得 } t^2 - 2\sqrt{2}t - 6 \geq 0,$$

$$\text{即得到 } (t - 3\sqrt{2})(t + \sqrt{2}) \geq 0 \text{ 可解得 } t \leq -\sqrt{2}, t \geq 3\sqrt{2},$$

$$\text{又注意到 } t > 0, \text{ 故解为 } t \geq 3\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } xy \geq 18.$$

故答案应为：18.

方法二：已知  $2x + y + 6 = xy$ , 即  $xy - 6 = 2x + y \geq 2\sqrt{2xy}$ , 令  $t = xy > 6$ , 即

$$t - 6 \geq 2\sqrt{2t},$$

解得  $t \geq 18$ , 当且仅当  $2x = y, 2x + y + 6 = xy$ , 即  $x = 3, y = 6$  时取到最小值.

【标注】 【知识点】 基本不等式的概念

20. 已知  $x > 0, y > 0, x + 2y + 2xy = 8$ , 则  $x + 2y$  的最小值是 \_\_\_\_\_.

【答案】 4

【解析】 方法一：对  $x + 2y + 2xy = 8$  两边加1分解因式得

$$9 = (x + 1)(2y + 1) \leq \left( \frac{x + 2y + 1 + 1}{2} \right)^2,$$

$\therefore (x+2y+2)^2 \geq 36$ , 即  $x+2y \geq 4$ , 当且仅当  $x+1=2y+1=3$ , 即  $x=2, y=1$  时取等号.

方法二: 考察基本不等式  $x+2y=8-x \cdot (2y) \geq 8 - \left(\frac{x+2y}{2}\right)^2$  (当且仅当  $x=2y$  时取等号)

整理得  $(x+2y)^2 + 4(x+2y) - 32 \geq 0$ ,

即  $(x+2y-4)(x+2y+8) \geq 0$ , 又  $x+2y > 0$ ,

所以  $x+2y \geq 4$  (当且仅当  $x=2y$  时即  $x=2, y=1$  时取等号)

则  $x+2y$  的最小值是 4.

故答案为: 4.

**【标注】**【知识点】已知等式关系求最值

21. 若实数  $a, b$  满足  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{ab}$ , 则  $ab$  的最小值为 ( ).

A.  $\sqrt{2}$

B. 2

C.  $2\sqrt{2}$

D. 4

**【答案】** B

**【解析】** 由题意得  $a > 0, b > 0$ ,

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{ab} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}},$$

$\therefore ab \geq 2$ , 当且仅当  $a=b$  时取等号,

所以  $ab$  的最小值为 2.

故选 B.

**【标注】**【知识点】含字母系数的不等式

## 1 的代换

**【备注】**【教师备注】与上一讲的差别在于——此讲主要考察的**含参问题**

22. 在等式  $\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = m$  中,  $x > 0, y > 0$ , 若  $x+y$  的最小值为  $\frac{5}{6}$ , 则  $m$  的值为 \_\_\_\_.

**【答案】** 30

**【解析】**  $x > 0, y > 0$ ,

$$\therefore x+y = \frac{1}{m} \left( \frac{4}{x} + \frac{9}{y} \right) (x+y) = \frac{1}{m} \left( 13 + \frac{9x}{y} + \frac{4y}{x} \right) \geq \frac{1}{m} \left( 13 + 2\sqrt{\frac{9x}{y} \cdot \frac{4y}{x}} \right) = \frac{25}{m}$$

当且仅当  $\frac{x}{y} = \frac{2}{3} > 0$  时取等号.

$$\therefore \frac{25}{m} = \frac{5}{6}, \text{ 解得 } m = 30.$$

故答案为30.

**【标注】**【知识点】基本不等式的概念；利用基本不等式求最值

23. 若两个正实数  $x, y$  满足  $4x + y = xy$ , 且不等式  $x + \frac{y}{4} \geq m^2 - 3m$  恒成立, 则实数  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $-1 \leq m \leq 4$

**【解析】**  $\because x, y$  均为正实数,

$$\text{又} \because 4x + y = xy,$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1,$$

$$\therefore m^2 - 3m \leq x + \frac{y}{4} \text{ 恒成立},$$

$$\therefore m^2 - 3m \leq \left(x + \frac{y}{4}\right)_{\min},$$

$$\left(x + \frac{y}{4}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right) = 1 + 1 + \frac{y}{4x} + \frac{4x}{y}$$

$$\geq 2 + 2 = 4,$$

当且仅当  $y = 4x$  时取得最小值,

$$\therefore m^2 - 3m \leq 4,$$

$$\therefore m^2 - 3m - 4 \leq 0,$$

$$\therefore (m - 4)(m + 1) \leq 0,$$

$$\therefore -1 \leq m \leq 4.$$

故答案为:  $-1 \leq m \leq 4$ .

**【标注】**【知识点】基本不等式与恒成立问题

24. 已知  $x > 0, y > 0$ , 且  $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 2$ ,  $x + y > \frac{m^2}{2} + 4m$  恒成立, 则实数  $m$  的取值范围是 ( ).
- A.  $(-8, 0)$       B.  $(1, \sqrt{5})$       C.  $(-8, 1)$       D.  $(-9, 1)$

**【答案】** D

**【解析】**  $\because x > 0, y > 0$ , 且  $x + y > \frac{m^2}{2} + 4m$  恒成立,

$$\therefore (x + y)_{\min} > \frac{m^2}{2} + 4m,$$

$$\text{又} \because \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 2,$$

$$\therefore x + y = \frac{1}{2}(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{y}{x} + \frac{4x}{y}\right) \geq \frac{1}{2} \left(5 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{4x}{y}}\right) = \frac{9}{2},$$

当且仅当  $\frac{y}{x} = \frac{4x}{y}$  即  $2x = y$  时等号成立，

$\therefore$  有  $\frac{9}{2} > \frac{m^2}{2} + 4m$ ，

即  $m^2 + 8m - 9 < 0$ ，

解得  $-9 < m < 1$ 。

故选D。

**【标注】**【知识点】倒数和形式；一元二次不等式；不等式中的恒成立与能成立问题

25. 正数  $a, b$  满足  $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} = 2$ ，若不等式  $a + b \geq -3x^2 + (6 - m)x + 20$  对任意实数  $x \in (1, 2]$  恒成立，则实数  $m$  的取值范围 \_\_\_\_\_。

**【答案】**  $[15, +\infty)$

**【解析】**  $\because$  正数  $a, b$  满足  $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} = 2$ ，  
 $\therefore a + b = \frac{1}{2}(a + b) \left( \frac{1}{a} + \frac{9}{b} \right)$   
 $= \frac{1}{2} \left( 10 + \frac{b}{a} + \frac{9a}{b} \right)$

$\geq 5 + \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{9a}{b}} = 8$ ，

当且仅当  $\frac{b}{a} = \frac{9a}{b}$  时等号成立，即  $(a + b)_{\min} = 8$ ，

不等式  $a + b \geq -3x^2 + (6 - m)x + 20$  对任意  $x \in (1, 2]$  恒成立，

即  $-3x^2 + (6 - m)x + 20 \leq 8$  对任意  $x \in (1, 2]$  恒成立，

整理得： $m \geq -3x + \frac{12}{x} + 6$ ，

设  $f(x) = -3x + \frac{12}{x} + 6$ ，

导数： $f'(x) = -3 - \frac{12}{x^2}$ ，

当  $x \in (1, 2]$  时， $f'(x) < 0$  恒成立，

故  $f(x)$  在  $(1, 2]$  上单调递减，

当  $x = 1$  时， $f(1) = -3 + 12 + 6 = 15$ ，

当  $x = 2$  时， $f(2) = -3 \times 2 + \frac{12}{2} + 6 = 6$ ，

$\therefore f(x) \in [6, 15]$ ，

因此  $m \in [15, +\infty)$ ，

故实数  $m$  的取值范围为  $[15, +\infty)$ 。

**【标注】**【思想】转化化归思想

**【方法】**均值不等式法；参变分离法

**【知识点】**利用基本不等式求最值；基本不等式成立的条件；利用导数证明不等式恒成立问题；导数与最值

26. 若两个正实数  $x, y$  满足  $\frac{1}{3x} + \frac{3}{y} = 1$ , 且不等式  $x + \frac{y}{4} - n^2 - \frac{13n}{12} < 0$  有解, 则实数  $n$  的取值范围是 ( ).
- A.  $\left(-\frac{25}{12}, 1\right)$   
 B.  $\left(-\infty, -\frac{25}{12}\right) \cup (1, +\infty)$   
 C.  $(1, +\infty)$   
 D.  $\left(-\infty, -\frac{25}{12}\right)$

【答案】B

【解析】  $x + \frac{y}{4} - n^2 - \frac{13n}{12} < 0$  有解,

$$\therefore n^2 + \frac{13}{12}n > \left(x + \frac{y}{4}\right)_{\min},$$

$$\because x > 0, y > 0,$$

$$\left(x + \frac{y}{4}\right)\left(\frac{1}{3x} + \frac{3}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{y}{12x} + \frac{3x}{y}$$

$$\geq \frac{13}{12} + 2\sqrt{\frac{3x}{y} \cdot \frac{y}{12x}}$$

$$= \frac{25}{12},$$

$$\therefore \left(x + \frac{y}{4}\right)_{\min} = \frac{25}{12},$$

$$\therefore n^2 + \frac{13n}{12} > \frac{25}{12},$$

$$\therefore 12n^2 + 13n - 25 > 0,$$

$$\therefore (12n + 25)(n - 1) > 0,$$

$$\therefore n < -\frac{25}{12} \text{ 或 } n > 1.$$

故选B.

【标注】【素养】逻辑推理；数学运算

【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题；已知等式关系求最值

【方法】均值不等式法

27. 若  $\log_4(3a + 4b) = \log_2\sqrt{ab}$ , 则  $a + b$  的最小值是 \_\_\_\_\_.

【备注】【教师备注】涉及到了对数运算, 暑期学习过对数内容的学生可以尝试求解

【答案】  $7 + 4\sqrt{3}$

【解析】方法一： $\because \log_4(3a+4b) = \log_2 \sqrt{ab}$ ,

$$\therefore \log_2 \sqrt{3a+4b} = \log_2 \sqrt{ab},$$

$$\therefore \sqrt{3a+4b} = \sqrt{ab},$$

$$\therefore 3a+4b = ab, a, b > 0.$$

$$\therefore b = \frac{3a}{a-4} > 0, \text{解得 } a > 4.$$

$$a+b = a + \frac{3a}{a-4} = a-4 + \frac{12}{a-4} + 7 \geq 7 + 2\sqrt{(a-4) \cdot \frac{12}{a-4}} = 7 + 4\sqrt{3},$$

当且仅当  $a = 4 + 2\sqrt{3}$  时取等号.

$$\therefore a+b \text{ 的最小值是 } 7 + 4\sqrt{3}.$$

故答案为： $7 + 4\sqrt{3}$ .

方法二： $\because \log_4(3a+4b) = \log_2 \sqrt{ab}$ ,

$$\therefore \log_2 \sqrt{3a+4b} = \log_2 \sqrt{ab},$$

$$\therefore \sqrt{3a+4b} = \sqrt{ab},$$

$$\therefore 3a+4b = ab, a, b > 0.$$

$$\therefore \frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 1.$$

$$\therefore a+b = (a+b)\left(\frac{4}{a} + \frac{3}{b}\right) = 7 + \frac{3a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{3a}{b} + \frac{4b}{a}} = 7 + 4\sqrt{3},$$

当等号成立时, 有  $\frac{3a}{b} = \frac{4b}{a}$  且  $\frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 1$ ,

$$\text{即 } a = 4 + 2\sqrt{3}, b = 3 + 2\sqrt{3},$$

$$\text{此时有 } (a+b)_{\min} = 7 + 4\sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】基本不等式的概念

### 1的代换——加减常数

28. 设  $a > 0, b > 1$ , 若  $a+b=2$ , 且不等式  $\frac{4}{a} + \frac{1}{b-1} > m^2 + 8m$  恒成立, 则  $m$  的取值范围是 ( ) .

A.  $m > 9$  或  $m < -1$

B.  $m > 1$  或  $m < -9$

C.  $-9 < m < 1$

D.  $-1 < m < 9$

【答案】C

【解析】 $\because a+b=2$ ,

$$\therefore a+b-1=1,$$

$$\therefore \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b-1}\right)(a+b-1) = 4 + 4 \cdot \frac{b-1}{a} + \frac{a}{b-1} + 1$$

$$\geq 5 + 2 \cdot 2 = 9 \text{ (当且仅当 } 4 \cdot \frac{b-1}{a} = \frac{a}{b-1} \text{ 时取“=”)},$$

$$\therefore \frac{4}{a} + \frac{1}{b-1} \text{ 的最小值为 } 9,$$

则由不等式  $\frac{4}{a} + \frac{1}{b-1} > m^2 + 8m$  恒成立，  
 得： $m^2 + 8m < 9$ ，即  $(m+9)(m-1) < 0$ ，  
 解得： $-9 < m < 1$ 。  
 故选：C。

【标注】【知识点】基本不等式的概念

### 1的代换——配凑

29. 函数  $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-x}$  ( $0 < x < 1$ ) 的最小值为 \_\_\_\_\_。

【答案】  $3 + 2\sqrt{2}$

【解析】  $\because 0 < x < 1$ ，

$$\therefore x > 0, 1-x > 0,$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} + \frac{2}{1-x} \\ &= [x + (1-x)] \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{1-x} \right) \\ &= 1 + 2 + \frac{1-x}{x} + \frac{2x}{1-x} \\ &\geq 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

当且仅当  $x = \sqrt{2} - 1$  时取得最小值。

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

30.

已知  $a > b > 0$  且  $a + b = 1$ ，求  $\frac{4}{a-b} + \frac{1}{2b}$  的最小值，并求取到最小值时  $a$ 、 $b$  的值。

【答案】 (1) 9,  $a = \frac{5}{6}$ ,  $b = \frac{1}{6}$ 。

【解析】 (1)  $\because a > b > 0, a + b = 1$ ，

$$\begin{aligned} \therefore a - b > 0, a - b + 2b &= 1, \\ \therefore \frac{4}{a-b} + \frac{1}{2b} &= \frac{4(a-b+2b)}{a-b} + \frac{a-b+2b}{2b} \\ &= 4 + 4 \cdot \frac{2b}{a-b} + \frac{a-b}{2b} + 1 \\ &= 4 \cdot \frac{2b}{a-b} + \frac{a-b}{2b} + 5 \geq 9, \\ \text{当且仅当 } 4 \cdot \frac{2b}{a-b} &= \frac{a-b}{2b} \text{ 即 } a = \frac{5}{6}, b = \frac{1}{6} \text{ 时等号成立,} \\ \text{所以 } \frac{4}{a-b} + \frac{1}{2b} \text{ 最小值为 } 9, \text{ 当 } a = \frac{5}{6}, b = \frac{1}{6} \text{ 时取到.} \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

