

02函数的值域与分段函数

1. 函数的值域

1.函数值域的定义

函数的**值域**是在对应关系 f 作用下，自变量 x 在定义域内取值时相应的**函数值组成的集合**。

2.对函数的值域的理解

函数的值域与最值均是在定义域上研究的，**闭区间上的连续函数必有最大值和最小值**；

3.常见函数的值域

函数	函数值域
一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$	①
二次函数 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$	②
反比例函数 $y = \frac{k}{x}(x \neq 0, k \neq 0)$	③

【备注】 【答案】 ① $\mathbf{R}$ ②当 $a > 0$ 时，值域为 $\left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right)$ ；当 $a < 0$ 时，值域为 $\left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$
③ $\{y|y \in \mathbf{R} \text{ 且 } y \neq 0\}$

2. 函数值域的求法

观察法

【备注】 【教师备注】 有的函数的结构并不复杂，可以通过对解析式的简单变形和观察，利用熟知的函数的值域求出函数的值域

1. 已知 $x \in \mathbf{R}$ ， $y \in \mathbf{N}^*$ ， $A = \{y|y = x^2 - 4x + 6\}$ ， $B = \{y|y = -x^2 - 2x + 18\}$ ，求 $A \cap B$ 。

【答案】 $\{y|2 \leq y \leq 19, y \in \mathbf{N}^*\}$ 。

【解析】 $y = x^2 - 4x + 6$
 $= x^2 + 4x + 4 + 2$
 $= (x - 2)^2 + 2 \geq 2,$

【标注】【知识点】函数的值域；交、并、补集混合运算；交集

- 【答案】 B

故选B.

【标注】【知识点】定轴动区间求值域；已知函数值域求参数

9 换元法

【备注】【教师备注】运用换元，将已知函数转化为值域容易确定的另一函数，从而求得原函数的值域

3. 函数 $y = x + 4\sqrt{1+x}$ 的值域为 _____ .

【备注】 【题型】 根号型

【答案】 $[-1, +\infty)$

当 $x = -1$ 时, $y = -1$,

∴函数值域为 $[-1, +\infty)$.

故答案为： $[-1, +\infty)$

【标注】【知识点】用单调性观察法求值域

|| 精进不休 日新月异

4. 函数 $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$ 的值域为 _____ .

【答案】 $[\sqrt{2}, 3]$

【解析】 设 $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$, 则 $y = t + \frac{t^2 - 2}{2}$,
先求此函数的定义域 , 即 $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 的值域 ,
 $t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \in [2, 4]$,
因此 $t \in [\sqrt{2}, 2]$,
故 $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2} = t + \frac{t^2 - 2}{2} \in [\sqrt{2}, 3]$.

【标注】【知识点】用换元法求值域

【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

【方法】换元法

5. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{(4x^2+1)(4x^2+3)}}{1+2x^2}$ 的值域为 _____ .

【答案】 $[\sqrt{3}, 2)$

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

💡 换元法 (对勾函数型)

6. 已知 $x < \frac{3}{2}$, 则函数 $f(x) = 2x + \frac{4}{2x-3}$ 的值域是 _____ .

【答案】 $(-\infty, -1]$

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

7. 分别求下列函数的值域 .

求 $y = \frac{x^2 - 9x + 10}{x - 1}$ 的值域 .

【答案】 (1) $(-\infty, -2\sqrt{2} - 7] \cup [2\sqrt{2} - 7, +\infty)$.

【解析】 (1) $y = \frac{x^2 - 9x + 10}{x - 1} = (x - 1) + \frac{2}{x - 1} - 7$,
 $\therefore$ 当 $x - 1 > 0$ 时, $(x - 1) + \frac{2}{x - 1} \geq 2\sqrt{2}$ (当且仅当 $x - 1 = \sqrt{2}$ 时, 等号成立),
 $\therefore$ 当 $x - 1 < 0$ 时, $(x - 1) + \frac{2}{x - 1} \leq -2\sqrt{2}$,
则 $(x - 1) + \frac{2}{x - 1} - 7 \geq 2\sqrt{2} - 7$ 或 $(x - 1) + \frac{2}{x - 1} - 7 \leq -2\sqrt{2} - 7$,
即 $y = \frac{x^2 - 9x + 10}{x - 1}$ 的值域为 $(-\infty, -2\sqrt{2} - 7] \cup [2\sqrt{2} - 7, +\infty)$.

【标注】 【知识点】用换元法求值域; 用判别式法求值域; 利用基本不等式求最值

8. 函数 $y = \frac{2x^2 - x + 1}{2x - 1} \left(x > \frac{1}{2} \right)$ 的值域是为 _____.

【答案】 $\left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}, +\infty \right)$

【解析】 $y = x + \frac{1}{2x - 1} = \frac{1}{2}(2x - 1) + \frac{1}{2x - 1} + \frac{1}{2}$,
其中 $2x - 1 > 0$,
故 $\frac{1}{2}(2x - 1) + \frac{1}{2x - 1} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$,
当且仅当 $2x - 1 = \sqrt{2}$ 时, 取“=”即 $x = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} > \frac{1}{2}$ 满足.
故答案为: $\left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}, +\infty \right)$.

【标注】 【素养】数学运算

【素养】数学抽象

【知识点】用分离常数法求值域

【知识点】基本不等式成立的条件

【方法】分离常数法

9. 函数 $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$ 的值域为 _____.

【答案】 $\left[-1, \frac{7}{3} \right]$

【解析】 $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$
 $= \frac{2(x^2 + x + 1) + x}{x^2 + x + 1}$
 $= 2 + \frac{x}{x^2 + x + 1}$

$$= 2 + \frac{1}{x + \frac{1}{x} + 1},$$

根据对勾函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 图象：

$$x > 0 \text{ 时: } y_{\min} = 2, \therefore f(x) \leq 2 + \frac{1}{3},$$

$$x < 0 \text{ 时, } y_{\max} = -2, \therefore f(x) \geq 2 + \frac{1}{-2+1},$$

$$\text{即 } f(x) \in \left[1, \frac{7}{3}\right].$$

【标注】【知识点】用分离常数法求值域

10. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$ 的值域为 _____ .

【答案】 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

【解析】 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

【标注】【知识点】函数的值域



配方法

【备注】【教师备注】若函数是二次函数形式，即可化为 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 型的函数，则可通过配方后再结合二次函数的性质求值域，但要注意给定区间上二次函数最值的求法。

此外，此处题目在后面学习完指数函数之后，还会将指数函数作为所谓的自变量进行配方求解复合函数值域

11. 函数 $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 3$ ，求 $f(x)$ 在区间 $[0, 9]$ 上的值域。

【答案】 $[2, 6]$.

【解析】 $[2, 6]$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】二次函数的图象及性质

12. 函数 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ ，求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上的值域。

【答案】 $[2, 66]$.

【解析】 分析过程：观察解析式的结构，进行识别：

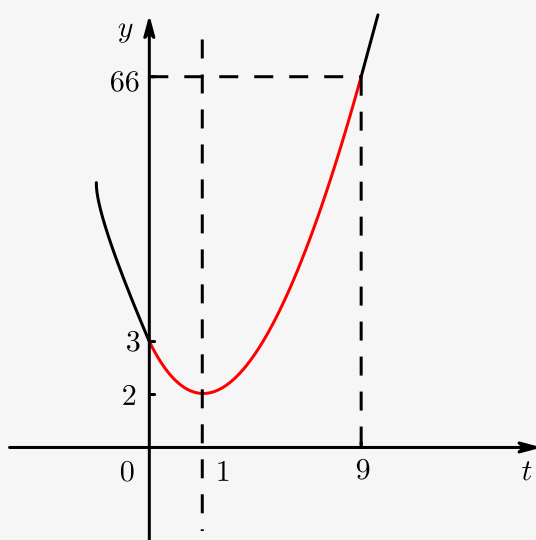
因为 x^4 与 x^2 是平方关系，

所以令 $x^2 = t$ ， $t \in [0, 9]$ ；

计算过程：

$$y = t^2 - 2t + 3, t \in [0, 9],$$

图象：



函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上的值域为 $[2, 66]$.

【标注】 【知识点】用图象法求值域；用换元法求值域

数形结合法

【备注】 【教师备注】有些函数的图像比较容易画出，可以通过函数的图像得出函数的值域

此处解题办法一般用于后面**分段函数**，因此在我们马上学习到的分段函数部分，我们会利用该方法求解相关值域问题

分离常数法

形如 $y = \frac{cx + d}{ax + b}$ ($a \neq 0$) 的函数，经常采用分离常数法，

将 $\frac{cx + d}{ax + b}$ 变形为 _____ ①

再结合 x 的取值范围确定 $\frac{d - \frac{bc}{a}}{ax + b}$ 的取值范围，从而确定函数的值域为

②.

举例：(1) 求函数 $y = \frac{2x-1}{x+1}$ 值域

(2) 求函数 $y = \frac{2x-1}{x+1} (1 \leq x \leq 2)$ 的值域

【备注】 【答案】 ① $\frac{\frac{c}{a}(ax+b) + d - \frac{bc}{a}}{ax+b} = \frac{c}{a} + \frac{d - \frac{bc}{a}}{ax+b}$ ，；② $\{y \mid y \in \mathbb{R}, \text{且} y \neq \frac{c}{a}\}$

【举例答案】 (1) $y = 2 - \frac{3}{x+1}$ 且 $\frac{3}{x+1} \neq 0$ ， $\therefore y \neq 2$ ， $\therefore$ 函数的值域为 $\{y \mid y \in \mathbb{R}, \text{且} y \neq 2\}$

(2) $y = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$ ，又 $1 \leq x \leq 2$ ，所以 $2 \leq x+1 \leq 3$ ，所以

$$1 \leq \frac{3}{x+1} \leq \frac{3}{2},$$

所以 $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ ，故所求函数的值域为 $[\frac{1}{2}, 1]$ 。

13. 函数 $f(x) = \frac{3x+2}{2x+1}$ ， $x \in [3, +\infty)$ 的值域是 ()。

A. $[\frac{11}{7}, +\infty)$
C. $[\frac{11}{7}, 2)$

B. $[\frac{3}{2}, +\infty)$
D. $(\frac{3}{2}, \frac{11}{7}]$

【答案】 D

【解析】 $f(x) = \frac{3x+2}{2x+1} = \frac{\frac{3}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{2x+1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4x+2}$ ，

$\therefore x \in [3, +\infty)$ ， $\therefore f(x)$ 为减函数，

$\therefore$ 当 $x=3$ 时， $f(x) = \frac{11}{7}$ ，取得最大值，当 x 趋近 $+\infty$ 时， $f(x)$ 趋近 $\frac{3}{2}$ ，

所以 $f(x)$ 的值域为 $(\frac{3}{2}, \frac{11}{7}]$ 。

故选：D。

【标注】 【知识点】用分离常数法求值域

14. 函数 $y = \frac{2x-1}{x-2}$ ， $x \in (-\infty, 0)$ 的值域是 ()。

A. $(-\infty, 2)$

B. $(-\infty, \frac{1}{2})$

C. $(0, \frac{1}{2})$

D. $(\frac{1}{2}, 2)$

【答案】 D

【解析】 $y = \frac{2x-1}{x-2} = \frac{2(x-2) + 3}{x-2} = 2 + \frac{3}{x-2}$ ，

$\therefore x \in (-\infty, 0)$ ，

$$\begin{aligned} \therefore x-2 &\in (-\infty, -2), \\ \therefore -\frac{3}{2} &< \frac{3}{x-2} < 0, \\ \therefore \frac{1}{2} &< 2 + \frac{3}{x-2} < 2, \\ \therefore \text{函数 } y &= \frac{2x-1}{x-2}, x \in (-\infty, 0) \text{ 的值域为 } \left(\frac{1}{2}, 2\right). \end{aligned}$$

故选D.

【标注】【知识点】用分离常数法求值域

15. 已知函数 $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2 + 1}$, 则 $f(x)$ 的值域为 _____.

【答案】 $[-2, 3]$

【解析】 $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2 + 1} = \frac{3(x^2 + 1) - 5}{x^2 + 1} = 3 - \frac{5}{x^2 + 1},$
 $\therefore x^2 + 1 \geq 1,$
 $\therefore 0 < \frac{5}{x^2 + 1} \leq 5,$
 $\therefore -2 \leq 3 - \frac{5}{x^2 + 1} < 3,$
 $\therefore f(x) \text{ 的值域为 } [-2, 3].$
 故答案为 $[-2, 3]$.

【标注】【知识点】分式函数

16. 函数 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$ 的值域为 _____.

【答案】 $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

【标注】【方法】分离常数法

【思想】数形结合思想

【素养】逻辑推理

【素养】数学运算

【素养】直观想象

【知识点】用分离常数法求值域

【知识点】二次函数的图象及性质

|| 精进不休 日新月异

17. 函数 $f(m) = \frac{24\sqrt{m^2 + 1}}{\sqrt{3m^2 + 4}}$ 的值域为 _____.

【答案】 $[12, 8\sqrt{3})$

【解析】 略 .

【标注】 【素养】 数学运算

|| 豪厘不伐 将用斧柯

18. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x - 2}$, 则 $f(x)$ 的值域为 _____ .

【答案】 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

【解析】 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x - 2} = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2} (x \neq -1)$, 所以值域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

【标注】 【知识点】 用分离常数法求值域

【方法】 分离常数法

【素养】 数学运算

【素养】 逻辑推理

🔗 判别式法

求形如 $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ (a, b, c, d, e, f 不同时为 0) 的值域, 常利用去分母的形式, 把函数转化成关于 x 的一元二次方程 $F(x, y)$, 通过方程有实根, 判别式 $\Delta \geq 0$, 求出 y 的取值范围, 即得到函数的值域 .

19. 函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}$ 的值域为 _____ .

【答案】 $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$

【解析】 $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1} \Rightarrow (y-1)x^2 + (y-2)x + y = 0$,

因为定义域为 $\mathbf{R}$,

所以此方程有解 .

当 $y = 1$ 时, 方程有解 .

当 $y \neq 1$ 时, 方程有解 $\Leftrightarrow \Delta = -3y^2 + 8y - 4 \geq 0$,

解得 $\frac{2}{3} \leq y \leq 2$.

综上所述, $y \in \left[\frac{2}{3}, 2\right]$.

【标注】【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

【知识点】用判别式法求值域

【方法】判别式法

20. 利用判别式方法求函数 $y = \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 - x + 1}$ 的值域.

【答案】 $y \in \left(2, \frac{10}{3}\right]$.

【解析】 $y(x^2 - x + 1) = 2x^2 - 2x + 3$, $(y - 2)x^2 - (y - 2)x + y - 3 = 0$, (*)

显然 $y \neq 2$, 而(*)方程必有实数解, 则 $\Delta = (y - 2)^2 - 4(y - 2)(y - 3) \geq 0$,

$\therefore y \in \left(2, \frac{10}{3}\right]$.

【标注】【知识点】用判别式法求值域

3. 分段函数

1. 对分段函数的理解

①画分段函数的图象时, 一定要考虑区间端点是否包含在内!

若端点**包含在内**, 则用**实心点**表示, 若端点**不包含在内**, 则用**空心圆圈**表示.

②分段函数的**定义域**是各段定义区间的**并集**, 分段函数的**值域**是各段值域的**并集**.

2. 分段函数常见的几种类型

①取整函数: $f(x) = [x]$ ($[x]$ 表示不大于 x 的最大整数).

② $f(x) = (-1)^x = \begin{cases} -1, & x \text{ 为正奇数,} \\ 1, & x \text{ 为非负偶数.} \end{cases}$

③含绝对值符号的函数.

如 $f(x) = |x + 2| = \begin{cases} x + 2, & x \geq -2, \\ -(x + 2), & x < -2. \end{cases}$

④自定义函数.

如 $f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x \leq -1, \\ x^2 - x - 2, & -1 < x \leq 2, \\ x - 2, & x > 2. \end{cases}$

21. 已知函数 $f(x) = x^2 + 3x|x - 2|$.

将函数 $f(x)$ 写成分段函数的形式, 并画出 $f(x)$ 的图象.

【答案】 (1) $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 6x, & x \geq 2 \\ -2x^2 + 6x, & x < 2 \end{cases}$.

【解析】 (1) 当 $x - 2 \geq 0, x \geq 2$ 时,

$$f(x) = x^2 + 3x(x - 2)$$

$$= 4x^2 - 6x,$$

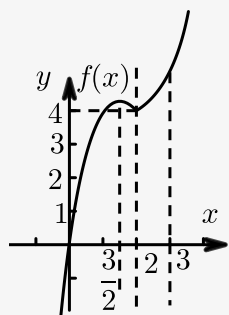
当 $x - 2 < 0, x < 2$ 时,

$$f(x) = x^2 - 3x(x - 2)$$

$$= -2x^2 + 6x,$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 6x, & x \geq 2 \\ -2x^2 + 6x, & x < 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 图象为:



【标注】【知识点】用图象法求值域

分段函数赋值运算

22. 已知 $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 2 \\ 3x, & x \geq 2 \end{cases}$, 若 $f(x) = 3$, 则 x 的值是 ().

A. 0

B. 0 或 $\frac{3}{2}$

C. $\pm\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】 D

【解析】 $\therefore f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 2 \\ 3x, & x \geq 2 \end{cases}$

$\therefore$ 当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = x + 3 = 3$, 解得 $x = 0$ (舍),

当 $-1 < x < 2$ 时, $f(x) = x^2 = 3$, 解得 $x = \sqrt{3}$,

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = 3x = 3$, 解得 $x = 1$ (舍),

综上 $x = \sqrt{3}$.

故选 D.

【标注】【知识点】函数求值问题; 分段函数

23. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$.

(1) 求 $f(-4)$, $f(3)$, $f[f(0)]$ 的值.

(2) 若 $f(a) = 10$, 求 a 的值.

【答案】 (1) $f(-4) = -2$, $f(3) = 6$, $f[f(0)] = 0$.

(2) $a = 5$.

【解析】 (1) $f(-4) = -4 + 2 = -2$,

$$f(3) = 2 \cdot 3 = 6,$$

$$f(0) = 0^2 = 0,$$

$$\therefore f[f(0)] = f(0) = 0.$$

(2) 当 $a \leq -1$ 时, $a + 2 = 10$, 得 $a = 8$, 不符合,

当 $-1 < a < 2$ 时, $a^2 = 10$ 得 $a = \pm\sqrt{10}$, 不符合,

当 $a \geq 2$ 时, $2a = 10$ 得 $a = 5$.

所以 $a = 5$.

【标注】【知识点】函数求值问题; 分段函数

24. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x < \frac{1}{2}) \\ f(x-1)+1 & (x \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$, 则 $f(\frac{1}{4}) + f(\frac{7}{6}) = (\quad)$.

A. $-\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{5}{6}$

D. $-\frac{5}{6}$

【答案】 A

【解析】 $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x < \frac{1}{2}) \\ f(x-1)+1 & (x \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$,

$$\text{则 } f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{7}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{4} - 1 + f\left(\frac{1}{6}\right) + 1 = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} - 1 = -\frac{1}{6}.$$

故选 A.

【标注】【知识点】分段函数; 函数求值问题

【素养】数学运算

 分段函数在实际生活中的应用

 一次函数模型

25. 2018年10月1日开始实行新的个人所得税征收办法，在规定项目下的个人，总收入小于等于5000元的将免税，超出部分如下表所示按阶梯方式，不同段有不同的税率

等级	含税级距（超出5000元）	税率（%）
1	不超过1500元的	3
2	超过1500元至4500元的部分	10
3	超过4500元至9000元的部分	20
4	超过9000元至35000元的部分	25
.....		

(1) 若某人月收入 x 元($x \in (0, 40000]$)，根据上表，结合所学函数知识，写出其每月上税金额 y 关于 x 的函数关系式。（只列关系式即可）

(2) 解答下列各题。

① 从事IT行业的小张月收入为23800元，则其应缴纳的个税金额为多少？

② 小张的大学同学小李月上税1000元，则其本月收入为多少？

【答案】 (1)
$$y = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 5000 \\ 0.03x - 150, & 5000 < x \leq 6500 \\ 0.1x - 650, & 6500 < x \leq 9500 \\ 0.2x - 1555, & 9500 < x \leq 14000 \\ 0.25x - 2255, & 14000 < x \leq 40000 \end{cases}.$$

(2) ① 3695元。

② 12775元。

【解析】 (1) 当 $x \leq 5000$ 时， $y = 0$ ，

当 $5000 < x \leq 6500$ 时，

$$y = (x - 5000) \times 3\%,$$

$$= 0.03x - 150,$$

当 $6500 < x \leq 9500$ 时，

$$y = 1500 \times 3\% + (x - 5000 - 1500) \times 10\%,$$

$$= 0.1x - 605,$$

当 $9500 < x \leq 14000$ 时，

$$y = 1500 \times 3\% + (4500 - 1500) \times 10\% + (x - 4500 - 5000) \times 20\%,$$

$$= 0.2x - 1555,$$

当 $14000 < x \leq 40000$ 时，

$$y = 1500 \times 3\% + 3000 \times 10\% + (9000 - 4500) \times 20\% + (x - 5000 - 9000) \times 25\%$$

,

$$= 0.25x - 2255,$$

$$\therefore y = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 5000 \\ 0.03x - 150, & 5000 < x \leq 6500 \\ 0.1x - 650, & 6500 < x \leq 9500 \\ 0.2x - 1555, & 9500 < x \leq 14000 \\ 0.25x - 2255, & 14000 < x \leq 40000 \end{cases}.$$

$$(2) \textcircled{1} \quad 14000 < 23800 < 40000,$$

$$\therefore \text{税金为 } 0.25 \times 23800 - 2255 = 3695.$$

$$\textcircled{2} \quad 0.2x - 1555 = 1000,$$

$$x = 12775.$$

$$\therefore \text{本月收入为 } 12775 \text{ 元}.$$

【标注】【知识点】函数的实际应用；分段函数；函数求值问题

26. 发展农村电商是“乡村振兴计划”的重要组成，某农村电商结合自身出售的商品，要购买3000个高为2分米，体积为18立方分米的长方体纸质包装盒．经过市场调研，此类包装盒按面积计价，每平方米的价格 y （单位：元）与订购数量 x （单位：个）之间有如下关系：

$$y = \begin{cases} 0.011, & 1000 \leq x < 2000 \\ 0.01, & 2000 \leq x < 4000 \\ 0.009, & x \geq 4000 \end{cases} \quad (\text{说明：商家规定每个纸盒计费面积为六个面的面积之和}), \text{ 则该电}$$

商要购入这3000个包装盒最少需要 _____ 元．

【答案】 1260

【解析】 $\therefore$ 要购买3000个，

$$\therefore y = 0.01,$$

$$\text{又} \therefore \text{高为 } 2\text{dm}, \text{ 体积为 } 18\text{dm}^3,$$

$$\therefore \text{底面积为 } 9\text{dm}^2,$$

$$\text{设长为 } x\text{dm}, \text{ 宽为 } y\text{dm},$$

$$\therefore xy = 9,$$

$$S_{\text{表面积}} = (xy + 2x + 2y) \times 2$$

$$= 18 + 4(x + y),$$

$$\therefore 3000 \text{ 个总的面积为 } 3000 \times [18 + 4(x + y)],$$

$$\therefore \text{费用为 } 0.01 \times 3000 \times [18 + 4(x + y)]$$

$$= 30[18 + 4(x + y)]$$

$$= 150 + 120(x + y),$$

$$\text{又 } x + y \geq 2\sqrt{xy} = 6,$$

$$\text{当且仅当 } x = y = 3 \text{ 时取等号},$$

$$\therefore \text{费用min为 } 540 + 120 \times 6 = 1260 \text{ (元)}.$$

【标注】【知识点】一次函数模型

|| 二次函数模型

27. 某水果店购进某种水果的成本为20元/kg, 经过市场调研发现, 这种水果在未来30天的销售单价 P (元/kg) 与时间 t (天) 之间的函数关系式为 $P = \frac{1}{4}t + 30$, 销售量 Q (kg) 与时间 t (天) 的函数关系式为 $Q = -2t + 120$.
- (1) 该水果店哪一天的销售利润最大? , 最大利润是多少?
- (2) 为相应政府“精准扶贫”号召, 该店决定每销售1kg水果就捐赠 n ($n \in \mathbf{N}$) 元给“精准扶贫”对象, 欲使捐赠后不亏损, 且利润随时间 t ($t \in \mathbf{N}$) 的增大而增大, 求捐赠额 n 的值.

【答案】 (1) 当 $t = 10$ 时, $y_{\max} = 1250$.

(2) $n = 10$.

【解析】 (1) 设利润为 y 元, 则 $y = (P - 20)Q = \left(\frac{1}{4}t + 10\right)(-2t + 120)$
 $= -\frac{1}{2}t^2 + 10t + 1200 = -\frac{1}{2}(t - 10)^2 + 1250$,
当 $t = 10$ 时, $y_{\max} = 1250$.

(2) 设捐赠后的利润为 w 元,

$$\begin{aligned} \text{则 } w &= (P - 20 - n)Q \\ &= \left(\frac{1}{4}t + 10 - n\right)(-2t + 120) \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + (2n + 10)t + 1200 - 120n, \end{aligned}$$

令 $w = f(t)$, 则二次函数 $f(t)$ 图象开口向下, 对称轴 $t = 2n + 10$,

$\therefore$ 利润随时间 t ($t \in \mathbf{N}$) 增大而增大, 且捐赠后不亏损,

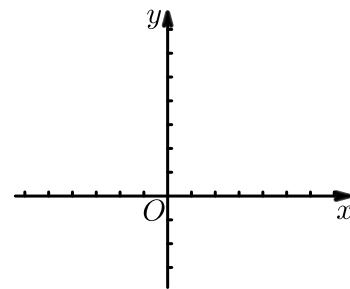
$$\therefore \begin{cases} 2n + 10 \geq 30 \\ f(1) \geq 0 \\ n \in \mathbf{N} \end{cases} \quad \text{得 } n = 10.$$

【标注】【知识点】用配方法求值域; 二次函数的图象及性质; 二次函数模型

数形结合法求解分段函数的值域

【备注】【教师备注】分段函数的值域是各段值域的并集

28. 已知函数 $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$, $x \in \mathbf{R}$.
- (1) 将函数写成分段函数的形式.
- (2) 画出函数的图象.



(3) 根据图象写出它的值域.

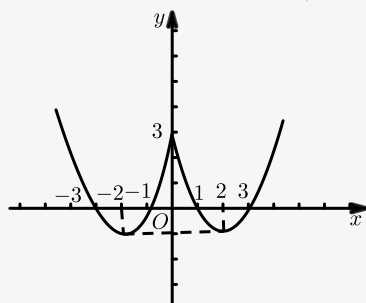
【答案】 (1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & x < 0 \end{cases}$.

(2) 画图见解析.

(3) 值域 $[-1, +\infty)$.

【解析】 (1) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3 = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & x < 0 \end{cases}$.

(2)



(3) 由图知, 值域 $[-1, +\infty)$.

【标注】 【知识点】利用函数性质画简图; 分段函数; 图象法; 用图象法求值域

29. 函数 $y = |x + 1| + |x - 1|$ 的值域为 ().

A. $(0, +\infty)$

B. $(2, +\infty)$

C. $[0, +\infty)$

D. $[2, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 由题意, $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -1 \\ 2, & -1 < x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$,

而 $-2x \geq 2 (x \leq -1)$ 且 $2x \geq 2 (x \geq 1)$,

$\therefore f(x) \geq 2$, 选 D.

【标注】 【知识点】用单调性观察法求值域; 分段函数

30.

$$\text{已知函数 } f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x \in [-2, -1) \\ -2, & x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right) \\ x - \frac{1}{x}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \end{cases}.$$

求 $f(x)$ 的值域 .

【答案】 (1) $\left[-\frac{5}{2}, -2\right] \cup \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

【解析】 (1) 当 $x \in [-2, 2]$ 时 , $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $[-2, 1)$ 上是增函数 , 此时 $f(x) \in \left[-\frac{5}{2}, -2\right)$,
 当 $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right)$ 时 , $f(x) = -2$,
 当 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 时 , $f(x) = x - \frac{1}{x}$, 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上是增函数 , 此时 $f(x) \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$,
 $\therefore f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{5}{2}, -2\right] \cup \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】子集

【知识点】分段函数

【知识点】用单调性观察法求值域

【知识点】利用函数单调性解不等式