

02函数的值域与分段函数

1. 函数的值域

1.函数值域的定义

函数的**值域**是在对应关系 f 作用下, 自变量 x 在定义域内取值时相应的**函数值组成的集合**.

2.对函数的值域的理解

函数的值域与最值均是在定义域上研究的, **闭区间上的连续函数必有最大值和最小值**;

3.常见函数的值域

函数	函数值域
一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$	①
二次函数 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$	②
反比例函数 $y = \frac{k}{x}(x \neq 0, k \neq 0)$	③

2. 函数值域的求法

观察法

- 已知 $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{N}^*$, $A = \{y|y = x^2 - 4x + 6\}$, $B = \{y|y = -x^2 - 2x + 18\}$, 求 $A \cap B$.
- 若函数 $f(x) = x^2 - 3x - 4$ 的定义域为 $[0, m]$, 值域为 $\left[-\frac{25}{4}, -4\right]$, 则 m 的取值范围是().
A. $(0, 4]$
B. $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$
C. $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$
D. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

换元法

- 函数 $y = x + 4\sqrt{1+x}$ 的值域为 _____ .

精进不休 日新月异

- 函数 $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$ 的值域为 _____ .
- 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{(4x^2+1)(4x^2+3)}}{1+2x^2}$ 的值域为 _____ .

换元法 (对勾函数型)

6. 已知 $x < \frac{3}{2}$, 则函数 $f(x) = 2x + \frac{4}{2x-3}$ 的值域是 _____ .

7. 分别求下列函数的值域 .

求 $y = \frac{x^2 - 9x + 10}{x - 1}$ 的值域 .

8. 函数 $y = \frac{2x^2 - x + 1}{2x - 1} \left(x > \frac{1}{2} \right)$ 的值域是为 _____ .

9. 函数 $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$ 的值域为 _____ .

10. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 2}$ 的值域为 _____ .

配方法

11. 函数 $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 3$, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 9]$ 上的值域 .

12. 函数 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上的值域 .

数形结合法

此处解题办法一般用于后面**分段函数** , 因此在我们马上学习到的分段函数部分 , 我们会利用该方法求解相关值域问题

分离常数法

形如 $y = \frac{cx + d}{ax + b}$ ($a \neq 0$) 的函数 , 经常采用分离常数法 ,

将 $\frac{cx + d}{ax + b}$ 变形为 _____ ①

再结合 x 的取值范围确定 $\frac{d - \frac{bc}{a}}{ax + b}$ 的取值范围 , 从而确定函数的值域为

_____ ② .

举例 : (1) 求函数 $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ 值域

(2) 求函数 $y = \frac{2x - 1}{x + 1} (1 \leq x \leq 2)$ 的值域

13. 函数 $f(x) = \frac{3x + 2}{2x + 1}$, $x \in [3, +\infty)$ 的值域是 () .

A. $\left[\frac{11}{7}, +\infty \right)$

B. $\left[\frac{3}{2}, +\infty \right)$

C. $\left[\frac{11}{7}, 2\right)$

D. $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{7}\right]$

14. 函数 $y = \frac{2x-1}{x-2}$, $x \in (-\infty, 0)$ 的值域是 () .

A. $(-\infty, 2)$

B. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

15. 已知函数 $f(x) = \frac{3x^2-2}{x^2+1}$, 则 $f(x)$ 的值域为 _____ .16. 函数 $y = \frac{x^2+x}{x^2+x+1}$ 的值域为 _____ .

|| 精进不休 日新月异

17. 函数 $f(m) = \frac{24\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{3m^2+4}}$ 的值域为 _____ .

|| 豪厘不伐 将用斧柯

18. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2}$, 则 $f(x)$ 的值域为 _____ .

🗨 判别式法

求形如 $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ (a, b, c, d, e, f 不同时为 0) 的值域, 常利用去分母的形式, 把函数转化成关于 x 的一元二次方程 $F(x, y)$, 通过方程有实根, 判别式 $\Delta \geq 0$, 求出 y 的取值范围, 即得到函数的值域.

19. 函数 $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^2+x+1}$ 的值域为 _____ .20. 利用判别式方法求函数 $y = \frac{2x^2-2x+3}{x^2-x+1}$ 的值域.

3. 分段函数

1. 对分段函数的理解

①画分段函数的图象时, 一定要考虑区间端点是否包含在内!

若端点**包含在内**, 则用**实心点**表示, 若端点**不包含在内**, 则用**空心圆圈**表示.②分段函数的**定义域**是各段定义区间的**并集**, 分段函数的**值域**是各段值域的**并集**.

2. 分段函数常见的几种类型

①取整函数: $f(x) = [x]$ ($[x]$ 表示不大于 x 的最大整数).

② $f(x) = (-1)^x = \begin{cases} -1, & x \text{ 为正奇数,} \\ 1, & x \text{ 为非负偶数.} \end{cases}$

③含绝对值符号的函数.

$$\text{如 } f(x) = |x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2, \\ -(x+2), & x < -2. \end{cases}$$

④自定义函数 .

$$\text{如 } f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \leq -1, \\ x^2-x-2, & -1 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

21. 已知函数 $f(x) = x^2 + 3x|x-2|$.

将函数 $f(x)$ 写成分段函数的形式, 并画出 $f(x)$ 的图象 .

分段函数赋值运算

22. 已知 $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 2 \\ 3x, & x \geq 2 \end{cases}$, 若 $f(x) = 3$, 则 x 的值是 () .

A. 0

B. 0 或 $\frac{3}{2}$

C. $\pm\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$

23. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$.

(1) 求 $f(-4)$, $f(3)$, $f[f(0)]$ 的值 .

(2) 若 $f(a) = 10$, 求 a 的值 .

24. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x < \frac{1}{2}) \\ f(x-1)+1 & (x \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$, 则 $f(\frac{1}{4}) + f(\frac{7}{6}) = ()$.

A. $-\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{5}{6}$

D. $-\frac{5}{6}$

分段函数在实际生活中的应用

一次函数模型

25. 2018年10月1日开始实行新的个人所得税征收办法, 在规定项目下的个人, 总收入小于等于5000元的将免税, 超出部分如下表所示按阶梯方式, 不同段有不同的税率

等级	含税级距 (超出5000元)	税率 (%)
1	不超过1500元的	3
2	超过1500元至4500元的部分	10
3	超过4500元至9000元的部分	20
4	超过9000元至35000元的部分	25
.....		

(1)

若某人月收入 x 元($x \in (0, 40000]$), 根据上表, 结合所学函数知识, 写出其每月上税金额 y 关于 x 的函数关系式. (只列关系式即可)

(2) 解答下列各题.

① 从事IT行业的小张月收入为23800元, 则其应缴纳的个税金额为多少?

② 小张的大学同学小李月上税1000元, 则其本月收入为多少?

26. 发展农村电商是“乡村振兴计划”的重要组成, 某农村电商结合自己出售的商品, 要购买3000个高为2分米, 体积为18立方分米的长方体纸质包装盒. 经过市场调研, 此类包装盒按面积计价, 每平方米的价格 y (单位: 元) 与订购数量 x (单位: 个) 之间有如下关系:

$$y = \begin{cases} 0.011, & 1000 \leq x < 2000 \\ 0.01, & 2000 \leq x < 4000 \\ 0.009, & x \geq 4000 \end{cases} \quad (\text{说明: 商家规定每个纸盒计费面积为六个面的面积之和}), \text{ 则该电}$$

商要购入这3000个包装盒最少需要 _____ 元.

|| 二次函数模型

27. 某水果店购进某种水果的成本为20元/kg, 经过市场调研发现, 这种水果在未来30天的销售单价 P (元/kg) 与时间 t (天) 之间的函数关系式为 $P = \frac{1}{4}t + 30$, 销售量 Q (kg) 与时间 t (天) 的函数关系式为 $Q = -2t + 120$.

(1) 该水果店哪一天的销售利润最大?, 最大利润是多少?

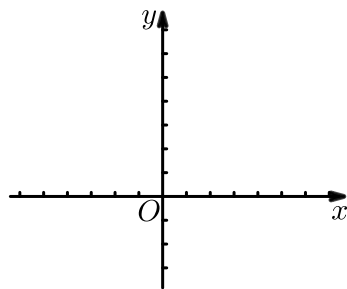
(2) 为相应政府“精准扶贫”号召, 该店决定每销售1kg水果就捐赠 n ($n \in \mathbf{N}$) 元给“精准扶贫”对象, 欲使捐赠后不亏损, 且利润随时间 t ($t \in \mathbf{N}$) 的增大而增大, 求捐赠额 n 的值.

💡 数形结合法求解分段函数的值域

28. 已知函数 $f(x) = x^2 - 4|x| + 3, x \in \mathbf{R}$.

(1) 将函数写成分段函数的形式.

(2) 画出函数的图象.



(3) 根据图象写出它的值域.

29. 函数 $y = |x + 1| + |x - 1|$ 的值域为 ().

A. $(0, +\infty)$

B. $(2, +\infty)$

C. $[0, +\infty)$

D. $[2, +\infty)$

30.

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x \in [-2, -1) \\ -2, & x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right) \\ x - \frac{1}{x}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \end{cases}$.

求 $f(x)$ 的值域 .