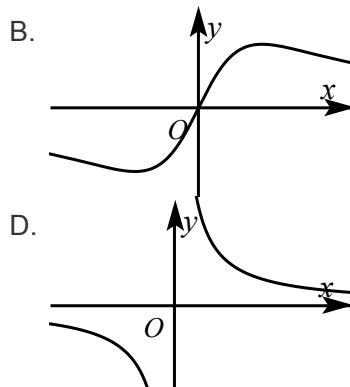
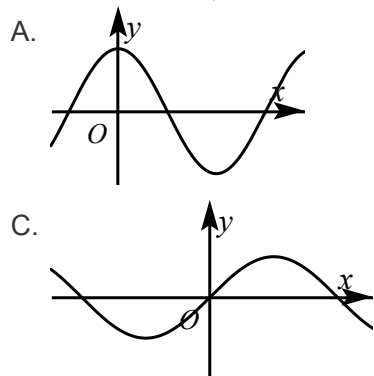


03函数性质综合练习题

🔍 图像辨析

1. 2018~2019学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第4题 ★★★

函数 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 的大致图象是 () .



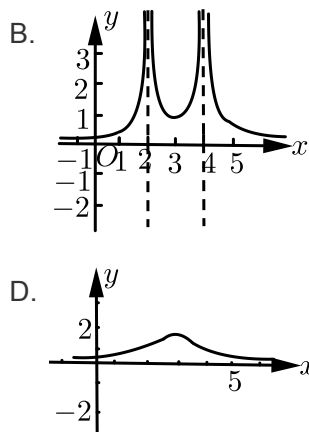
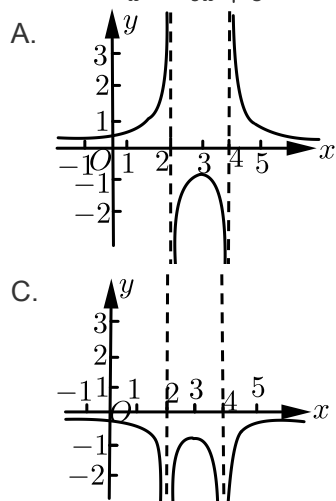
【答案】 B

【解析】 因为 $f(0) = 0$, 所以舍去 D , 因为 $x > 0$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} > 0$, 所以舍去 A , C .
故选 B .

【标注】 【知识点】 函数图象的识别问题 ; 图象法

2. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第6题4分 ★★★

函数 $y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8}$ 的图象是 () .



【答案】 A

【解析】 $x^2 - 6x + 8 < 0$,

$$(x-2)(x-4) < 0,$$

$$2 < x < 4,$$

当 $x \in (2, 4)$ 时, $y < 0$, 排除 BD,

$$x^2 - 6x + 8 > 0,$$

$$(x-2)(x-4) > 0,$$

$$x > 4 \text{ 或 } x < 2,$$

当 $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ 时 $y > 0$, 排除 C.

故选 A.

【标注】【知识点】函数图象的识别问题

加减常数构造奇偶函数

3. 2018~2019学年9月天津河东区天津市第五十四中学高一上学期月考第16题4分 ★

已知函数 $f(x) = x^3 + ax + 3$, $f(-m) = 1$, 则 $f(m) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 5

【解析】 $f(-m) = -m^3 - am + 3 = 1$.

$$\therefore m^3 + am = 2.$$

$$\therefore f(m) = m^3 + am + 3 = 2 + 3 = 5.$$

【标注】【知识点】函数奇偶性的运算

4. 2019~2020学年天津高一上学期期中六校联考第13题5分 ★★

已知函数 $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 8$, 且 $f(-3) = 6$, 则 $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 10

【解析】 设 $h(x) = ax^5 + bx^3 + cx$,

$$\text{则 } h(-x) = -ax^5 - bx^3 - cx = -h(x),$$

所以 $h(x)$ 是奇函数,

$$\text{则 } f(-3) = h(-3) + 8 = 6,$$

$$\text{所以 } h(-3) = -2 = -h(3),$$

$$\text{故 } h(3) = 2,$$

$$\text{则 } f(3) = h(3) + 8 = 10.$$

故答案为: 10.

【标注】【知识点】利用定义判断函数奇偶性

分段函数求解不等式

5. 2018~2019学年10月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第7题5分 ★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 0 \\ -x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$ ，则不等式 $f(a^2 - 4) > f(3a)$ 的解集为 () .

A. $(-1, 4)$

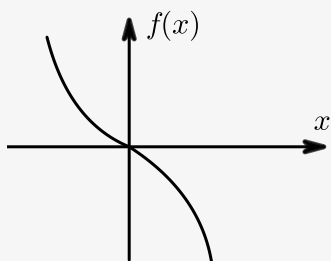
B. $(1, 4)$

C. $(-3, 5)$

D. $(2, 6)$

【答案】 A

【解析】 图象如下：



由图象可知， $f(x)$ 在定义域内为减函数，

又 $\because f(a^2 - 4) > f(3a)$ ，

$\therefore a^2 - 4 < 3a$ ，

$\therefore (a - 4)(a + 1) < 0$ ，

$\therefore -1 < a < 4$.

故选 A .

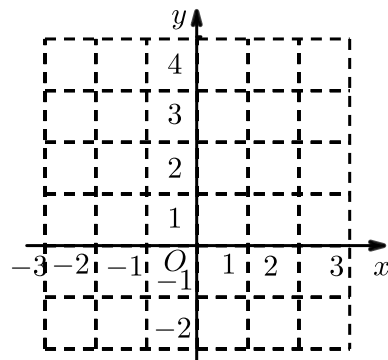
【标注】 【知识点】一元二次不等式；利用函数单调性解不等式；分段函数

零点问题

6. 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第18题8分 ★★★

已知函数 $f(x) = x^2 - 2|x|$.

(1) 在所给坐标系中，画出函数 $f(x)$ 的图象，并写出 $f(x)$ 的单调递增区间 .



(2) 若函数 $g(x) = f(x) + 3a - 1$ 有 4 个零点，求 a 的取值范围 .

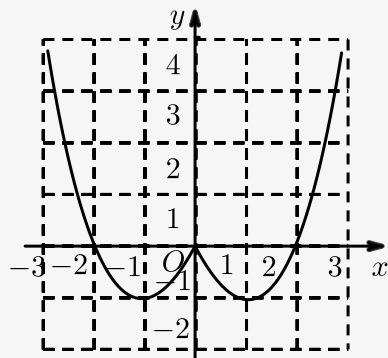
【答案】(1) $[-1, 0]$ 和 $[1, +\infty]$, 画图见解析 .

(2) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

【解析】(1) 整理得 $f(x) = x^2 - 2|x|$

$$= \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases}$$

函数 $f(x)$ 的图象, 如图所示:



则 $f(x)$ 单调递增区间为 $[-1, 0]$ 和 $[1, +\infty]$.

(2) $g(x) = x^2 - 2|x| + 3a - 1$

$$= \begin{cases} (x-1)^2 + 3a - 2, & x \geq 0 \\ (x+1)^2 + 3a - 2, & x < 0 \end{cases}$$

函数 $g(x)$ 图象最低点为 $(1, 3a - 2)$ 和 $(-1, 3a - 2)$,

依题意, 若使函数 $g(x)$ 有 4 个零点,

只需 $-1 < 3a - 2 < 0$,

$$\therefore a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) .$$

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围; 函数零点存在定理

定义域为 $\mathbf{R}$

7. 2020~2021 学年天津静海区静海区第一中学高一上学期期中 (七校联考) 第13题5分 ★★

若函数 $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{mx^2 + 2mx + 1}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则实数 m 的取值范围是 _____ .

【答案】 $[0, 1)$

【解析】 $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{mx^2 + 2mx + 1}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

则 $\forall x \in \mathbf{R}$, $mx^2 + 2mx + 1 > 0$,

$m = 0$ 时, $mx^2 + 2mx + 1 = 1 > 0$ 恒成立 ,

$m < 0$ 时, $mx^2 + 2mx + 1$ 表示开口向下的抛物线, 总是存在 $x_0 \in \mathbf{R}$,

$mx_0^2 + 2mx_0 + 1 < 0$, 舍去 ,

$m > 0$ 时, $mx^2 + 2mx + 1 > 0$ 恒成立 ,

$$\text{则 } \Delta = (2m)^2 - 4 \times m \times 1 = 4m^2 - 4m < 0 ,$$

$$m \in (0, 1) ,$$

综上，实数 m 的取值范围是 $[0, 1)$.

【标注】【知识点】已知定义域求参数的取值范围；不等式中的恒成立与能成立问题

解集为R

8. 2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第4题4分 ★★

若不等式 $4x^2 + (m-1)x + 1 > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ ，则实数 m 的取值范围是 () .

- A. $m > 5$ 或 $m < -3$ B. $m \geq 5$ 或 $m \leq -3$ C. $-3 \leq m \leq 5$ D. $-3 < m < 5$

【答案】 D

【解析】 $\because 4x^2 + (m-1)x + 1 > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ ，

$$\therefore \Delta < 0 ,$$

$$\therefore (m-1)^2 - 4 \times 4 < 0 ,$$

$$\therefore -4 < m-1 < 4 ,$$

$$\therefore -3 < m < 5 .$$

故选 D .

【标注】【知识点】二次函数相关的恒成立问题

值域型问题

9. 2020~2021学年天津滨海新区塘沽第一中学高一上学期期中第18题5分 ★★

函数 $f(x) = x^2 - 2x$ ， $g(x) = ax + 1$ ($a > 0$)，若对任意的 $x_1 \in [-2, 2]$ ，存在 $x_2 \in [-2, 2]$ ，使 $f(x_1) = g(x_2)$ ，则 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$

【解析】 因为 $f(x) = x^2 - 2x$ 的对称轴为 $x = 1$ ，开口向上， $x \in [-2, 2]$ ，

当 $x = 1$ 时，函数取得最小值 $f(1) = -1$ ，

当 $x = -2$ 时，函数取得最大值 $f(-2) = 8$ ，

故当 $x_1 \in [-2, 2]$ 时， $f(x_1) \in [-1, 8]$ ，

$\therefore$ 对任意的 $x_1 \in [-2, 2]$ ，存在 $x_2 \in [-2, 2]$ ，使 $f(x_1) = g(x_2)$ ，

$\therefore [-1, 8] \subseteq [-2a + 1, 2a + 1]$ ，

$$\text{故 } \begin{cases} -2a + 1 \leq -1 \\ 2a + 1 \geq 8 \end{cases} ,$$

解得, $a \geq \frac{7}{2}$.
故答案为: $\left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

【标注】【知识点】动轴定区间求值域; 二次函数相关的恒成立问题

最值问题

10. 2018~2019学年10月天津河西区天津市第四中学高一上学期月考第17题10分 ★★

已知函数 $f(x) = 3x^2 - 12x + 4$, 当 $f(x)$ 的定义域为 $[0, a]$ 时 ($a > 0$ 且 $a \in \mathbf{R}$), 求 $f(x)$ 的最大值与最小值.

【答案】若 $0 < a \leq 2$, $f(x)_{\max} = f(0) = 4$,
 $f(x)_{\min} = f(a) = 3a^2 - 12a + 4$,
 若 $2 \leq a \leq 4$, $f(x)_{\max} = f(0) = 4$,
 $f(x)_{\min} = f(2) = -8$,
 若 $a > 4$, $f(x)_{\max} = f(a) = 3a^2 - 12a + 4$,
 $f(x)_{\min} = f(2) = -8$.

【解析】由题可知 $f(x)$ 的对称轴为 $x = 2$,
分类讨论 a 的大小, 结合单调性.

【标注】【知识点】定轴动区间求值域

11. 2018~2019学年天津静海县静海县第一中学高一上学期期中第8题4分 ★★

已知函数 $f(x) = x^2 + 2ax$ 在 $x \in [-2, 1]$ 上有最小值 -1 , 则 a 的值为 ().

- A. -1 或 1 B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{5}{4}$ 或 -1 D. $\frac{5}{4}$ 或 1 或 -1

【答案】A

【解析】函数的对称轴是 $x = -a$,
 $-a \leq -2$, 即 $a \geq 2$ 时,
 $f(x)$ 在 $[-2, 1]$ 递增, $f(x)_{\min} = f(-2) = 4 - 4a = -1$,
 解得: $a = \frac{5}{4}$, 舍,
 $-2 < -a < 1$ 即 $-1 < a < 2$ 时,
 $f(x)$ 在 $[-2, -a]$ 递减, 在 $(-a, 1]$ 递增,
 故 $f(x)_{\min} = f(-a) = -a^2 = -1$, 解得: $a = 1$,
 $-a \geq 1$ 即 $a \leq -1$ 时,
 $f(x)$ 在 $[-2, 1]$ 递减,

故 $f(x)_{\min} = f(1) = 1 + 2a = -1$, 解得 : $a = -1$,

综上 , $a = 1$ 或 -1 .

故选 A .

【标注】【知识点】动轴定区间求值域；函数的值域

 恒能成立问题

12. 2017~2018学年陕西西安长安区长安区第一中学高一下学期期中理科第5题5分 ★★

如果 $kx^2 + 2kx - (k + 2) < 0$ 恒成立 , 则实数 k 的取值范围是 () .

A. $-1 \leq k \leq 0$

B. $-1 \leq k < 0$

C. $-1 < k \leq 0$

D. $-1 < k < 0$

【答案】 C

【解析】 根据题意 , 可分 $k = 0$ 和 $k < 0$ 两种情况 ,

① $k = 0$ 时 , $-2 < 0$, 不等式恒成立 .

② $k < 0$ 时 , 要使不等式恒成立 , $\Delta = 4k^2 + 4k(k + 2) < 0$,

$\therefore -1 < k < 0$,

综上所述 k 的取值范围是 $(-1, 0]$.

故选 C .

【标注】【知识点】一元二次不等式

13. 2018~2019学年天津河东区天津市第七中学高二上学期期中第5题4分 ★★★

当 $x \in \mathbf{R}$ 时 , 不等式 $kx^2 - kx + 1 > 0$ 恒成立 , 则 k 的取值范围是 () .

A. $(0, +\infty)$

B. $[0, +\infty)$

C. $[0, 4)$

D. $(0, 4)$

【答案】 C

【解析】 当 $k = 0$ 时 , $kx^2 - kx + 1 > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$, 显然恒成立 ;

当 $k \neq 0$ 时 , 则 $\begin{cases} k > 0 \\ \Delta = k^2 - 4k < 0 \end{cases}$, 解得 $0 < k < 4$;

综上 , k 的取值范围是 $[0, 4)$.

故选 C .

【标注】【知识点】一元二次不等式

【素养】数学运算

14. 2020~2021学年10月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第21题10分 ★★★

设 $f(x) = mx^2 - 2mx - 4$.

若对于一切实数 x , $f(x) < 0$ 恒成立 , 求实数 m 的取值范围 .

【答案】 (1) $(-4, 0]$.

【解析】 (1) $\because mx^2 - 2mx - 4 < 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立 ,

i . $m = 0$, $-4 < 0$ 满足 ,

ii . $m \neq 0$,

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} ,$$

$$4m^2 + 16m < 0 ,$$

$$m(m + 4) < 0 ,$$

$$-4 < m < 0 ,$$

综上 $m \in (-4, 0]$.

故答案为 : $(-4, 0]$.

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题 ; 利用基本不等式求最值

15. 2018~2019学年天津和平区高三上学期期末理科第13题5分 ★★

对于任意 $x > 0$, 不等式 $3x^2 - 2mx + 12 > 0$ 恒成立 , 则常数 m 的取值范围是 _____ .

【答案】 $(-\infty, 6)$

【解析】 $\because 3x^2 - 2mx + 12 > 0$ 在 $x > 0$ 时恒成立 ,

设 $f(x) = 3x^2 - 2mx + 12$,

$$\textcircled{1} \Delta < 0 \text{ 即 } 4m^2 - 144 < 0 ,$$

$$\therefore -6 < m < 6 \text{ 成立 .}$$

$$\textcircled{2} \Delta = 0 , \text{ 即 } m = \pm 6 ,$$

当 $m = 6$ 时 , $f(x) = 3x^2 - 12x + 12$,

$$f(x) = 0 \text{ 时 , } x = 2 ,$$

当 $m = -6$ 时 , $f(x) = 3x^2 + 12x + 12$,

$$f(x) = 0 \text{ 时 , } x = -2 ,$$

不成立 , 舍去 .

当 $m = -6$ 时 , $f(x) = 3x^2 + 12x + 12$,

$$f(x) = 0 \text{ 时 , } x = -2 , \text{ 成立 .}$$

$$\textcircled{3} \Delta > 0 \text{ 时 , } m < -6 \text{ 或 } m > 6 ,$$

$$\begin{cases} \frac{m}{3} < 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m < 0 ,$$

综上，解集为 $(-\infty, 6)$.

【标注】【知识点】二次函数相关的恒成立问题

16. 2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第21题12分 ★★★

已知函数 $f(x) = x|x - a| - 1 (x \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 2$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调增区间（写出结论即可） .

(2) 在 (1) 的条件下，当 $x > 2$ 时， $f(x) \geq kx - 2k - 2$ 恒成立，求实数 k 的取值范围 .

【答案】(1) $(-\infty, 1)$, $(2, +\infty)$.

(2) $k \leq 4$.

【解析】(1) $f(x) = x|x - 2| - 1$
$$= \begin{cases} (x-1)^2 - 2, & x \geq 2 \\ -(x-1)^2, & x < 2 \end{cases}$$

 $\therefore$ 增区间： $(-\infty, 1)$, $(2, +\infty)$.

(2) $\because x > 2$,
 $\therefore x^2 - 2x - 1 \geq kx - 2k - 2$,
 $\therefore k \leq \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$,
令 $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$
$$= x - 2 + \frac{1}{x - 2} + 2$$

$$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{(x-2)}} + 2$$

$$= 4$$
 ,
当且仅当 $x - 2 = \frac{1}{x - 2}$ 即 $x = 3$ 时取等号 ,
 $\therefore k \leq 4$.

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题；求单调区间；求分段函数的最值

17. 2020~2021学年10月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第9题4分 ★★

已知命题 $p: \exists 1 \leq x \leq 2, x^2 + a - 1 < 0$ 为真命题，则实数 a 的取值范围是 () .

A. $a < -3$

B. $a < 0$

C. $a < 1$

D. $-3 \leq a \leq 0$

【答案】B

【解析】 $\because \exists 1 \leq x \leq 2, x^2 + a - 1 < 0$,
 $\therefore \exists 1 \leq x \leq 2, a < 1 - x^2$,
 $\therefore a < (1 - x^2)_{\max}$,

$$\because 1 \leq x \leq 2 ,$$

$$\therefore 1 \leq x^2 \leq 4 ,$$

$$\therefore -3 \leq 1 - x^2 \leq 0 ,$$

$$\therefore (1 - x^2)_{\max} = 0 ,$$

$$\therefore a < 0 .$$

故选 B .

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题