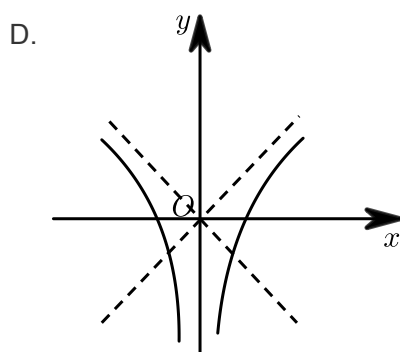
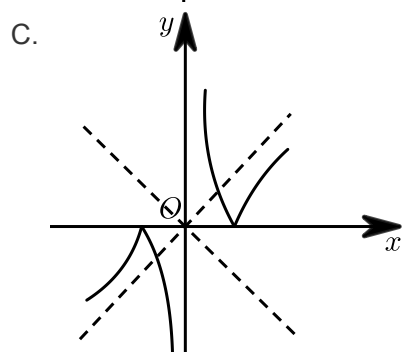
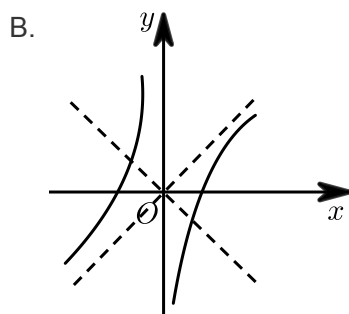
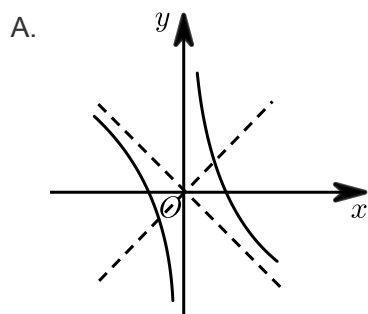


03函数性质综合

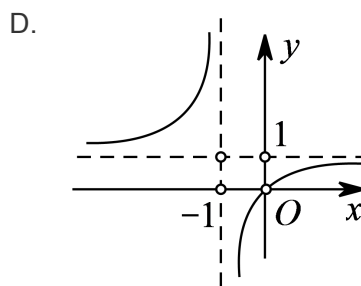
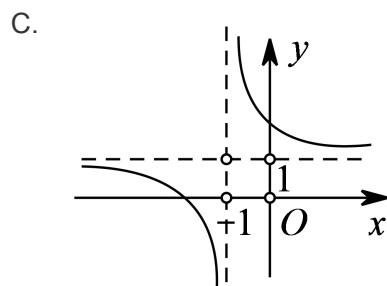
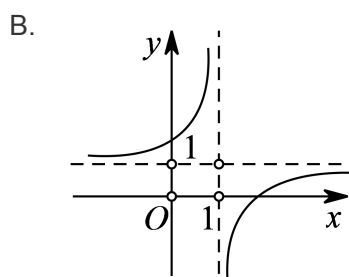
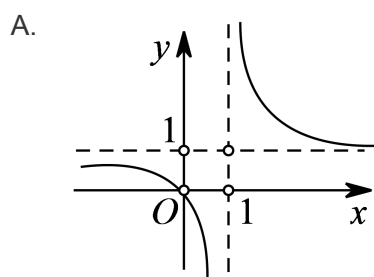
1. 函数奇偶性的常见应用

函数图像的辨析

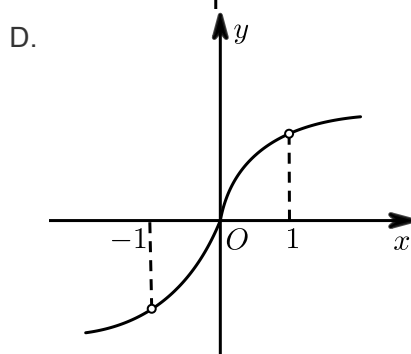
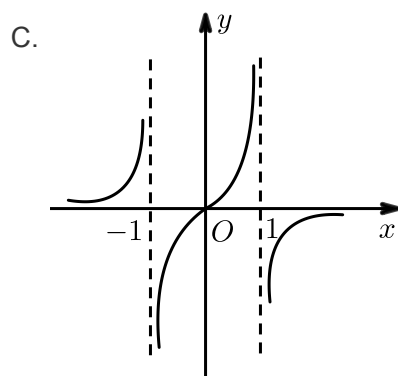
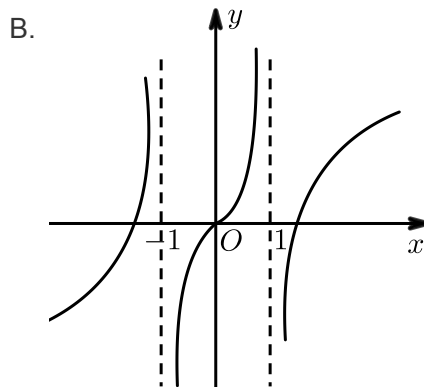
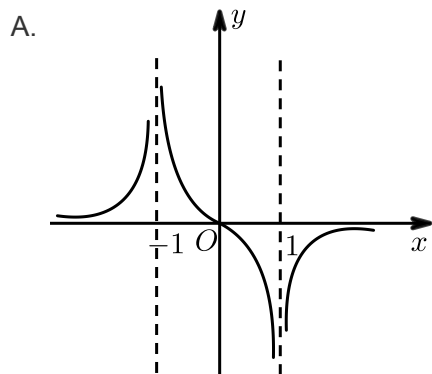
1. 函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 的图象为 () .



2. 函数 $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ 的图象是 () .



3. 我国著名数学家华罗庚先生曾说：“数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事休。”在数学的学习和研究中，常用函数的图象来研究函数的性质，也常用函数的解析式来琢磨函数图象的特征，如函数 $f(x) = \frac{ex}{1-x^2}$ 的图象大致是 () .



加減常數構造奇偶函數

4. 已知函數 $f(x) = x + \frac{1}{x} - 1$ ，且 $f(a) = 2$ ，則 $f(-a) = ()$.
 A. -1 B. -2 C. -3 D. -4
5. 已知 $f(x) = ax^3 - \frac{b}{x} + 2$ ，且 $f(-5) = 17$ ，則 $f(5) = ()$.
 A. 13 B. -13 C. 15 D. -15
6. 若函數 $y = f(x)$ 是奇函數，且函數 $F(x) = af(x) + bx + 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最大值 8，則函數 $y = F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有 $()$.
 A. 最小值 -8 B. 最大值 -8 C. 最小值 -4 D. 最小值 -6

利用函數奇偶性、單調性求解不等式

7. 若函數 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上單調遞增，則 $f(m^2 - m + 5)$ 與 $f(3m)$ 的大小關係為 $()$.
 A. $f(m^2 - m + 5) > f(3m)$ B. $f(m^2 - m + 5) < f(3m)$
 C. $f(m^2 - m + 5) = f(3m)$ D. 不能確定
8. 已知函數 $f(x)$ 為 $\mathbf{R}$ 上的減函數，則滿足 $f\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) < f(1)$ 的實數 x 的取值範圍是 $()$.
 A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 C. $(-1, 1)$ D. $(0, 1)$

2. 分段函數的常見應用

根據分段函數圖像求解不等式

9. 已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{|x|+2}$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $f(x^2 - 3x) < f(3 - x)$ 的解集是 _____ .
10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$, 则满足不等式 $f(4 - x^2) > f(2x)$ 的 x 的取值范围是 _____ .
11. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x \geq 0 \\ x + 6, & x < 0 \end{cases}$, 则不等式 $f(x) > f(1)$ 的解集是 () .
- A. $(-3, 1) \cup (3, +\infty)$ B. $(-3, 1) \cup (2, +\infty)$ C. $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (1, 3)$

零点问题

1. 零点的定义

对于函数 $y = f(x)$, 我们把使 $f(x) = 0$ 的实数 x 的值叫做函数 $y = f(x)$ 的零点.

2. 零点的等价理解

由函数零点的概念可知, 函数 $y = f(x)$ 的零点也是函数 $y = f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标.

也即: 方程 $f(x) = 0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 有零点.

12. 对实数 a 和 b , 定义运算“ $\otimes$ ”: $a \otimes b = \begin{cases} a, & a - b \leq 1 \\ b, & a - b > 1 \end{cases}$, 设函数 $f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - 1)$, $x \in \mathbf{R}$. 若关于 x 的方程 $f(x) = m$ 恰有两个不等实根, 则实数 m 的取值范围是 () .
- A. $(-1, 1] \cup [2, +\infty)$ B. $(-2, -1] \cup (1, 2]$ C. $(-\infty, -2) \cup (1, 2]$ D. $(-2, -1]$
13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x - 2a, & x > 0 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$, 若方程 $f(x) = x$ 有 4 个不同实根, 则 a 的取值范围是 () .
- A. $(-\infty, \frac{1}{4})$ B. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ C. $(0, \frac{1}{4})$ D. $(0, \frac{1}{8})$
14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x + 1|, & x \in [-2, 0] \\ 2f(x - 2), & x \in (0, +\infty) \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = x + a$ 在区间 $[-2, 4]$ 内有 3 个不等实根, 则实数 a 的取值范围 () .
- A. $(-2, 0)$ B. $(-2, 0]$ C. $(-2, 0) \cup [1, 2)$ D. $(-2, 0) \cup \{1\}$
15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x + \frac{1}{x}|, & (x \neq 0) \\ 2, & (x = 0) \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) - (a + 2)f(x) + 2a = 0$ 有三个不同实数解的充要条件是 () .
- A. $a = 2$ B. $a < 2$ C. $a < 0$ D. $a \leq 2$

3. 二次函数的相关讨论

定义域为 $\mathbf{R}$

16. 若函数 $y = \frac{ax + 1}{\sqrt{ax^2 - 4ax + 3}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 _____ .
- 17.

已知函数 $f(x) = \sqrt{\frac{1}{mx^2 - mx + 3}}$ 的定义域是一切实数, 则 m 的取值范围为 _____ .

解集为R

18. 关于 x 的不等式 $x^2 + 4x - a \geq 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

19. 若不等式 $mx^2 + 2mx - 4 < 2x^2 + 4x$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则实数 m 的取值范围是 () .

- A. $-2 < m < 2$ B. $-2 < m \leq 2$ C. $m < -2$ 或 $m \geq 2$ D. $m < 2$

值域型问题

20. 已知 $g(x) = mx + 2$, $f(x) = x^2 - 2x$, 若对 $\forall x_1 \in [-1, 2]$, $\exists x_2 \in [-1, 2]$, 有 $g(x_1) = f(x_2)$ 成立, 则 m 的取值范围是 _____ .

21. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x \in [-2, -1) \\ -2, & x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right) \\ x - \frac{1}{x}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \end{cases}$.

(1) 求 $f(x)$ 的值域 .

(2) 设函数 $g(x) = ax - 2$, $x \in [-2, 2]$, 若对于任意 $x_1 \in [-2, 2]$, 总存在 $x_0 \in [-2, 2]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求实数 a 的取值范围 .

最值问题

22. 对 $a, b \in \mathbf{R}$, 记 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a < b \end{cases}$, 则函数 $f(x) = \max\left\{|x+1|, x^2 - 2x + \frac{9}{4}\right\}$ () .

- A. 有最大值 $\frac{3}{2}$, 无最小值 B. 有最小值 $\frac{3}{2}$, 无最大值
C. 有最大值 $\frac{1}{2}$, 无最小值 D. 有最小值 $\frac{1}{2}$, 无最大值

23. 已知函数 $f(x)$ 为二次函数, 且 $f(x-1) + f(x) = 2x^2 + 4$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式 .

(2) 当 $x \in [t, t+2]$, $t \in \mathbf{R}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值 (用 t 表示) .

24. 已知函数 $y = \frac{ax^2}{x-1} (x > 1)$ 有最大值 -4 , 则 a 的值为 () .

- A. 1 B. -1 C. 4 D. -4

实数域上恒成立问题

25. 若不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 对一切实数 x 都成立, 则 k 的取值范围为 () .

- A. $-3 < k < 0$ B. $-3 \leq k < 0$ C. $-3 \leq k \leq 0$ D. $-3 < k \leq 0$

26. 若函数 $y = (m^2 + 4m - 5)x^2 + 4(1 - m)x + 3 > 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 () .

- A. $m = -5$ 或 $1 \leq m < 19$ B. $1 < m < 19$

C. $m = -5$ 或 $1 < m < 19$

D. $1 \leq m < 19$

27. 已知关于 x 的不等式 $(a^2 - 4)x^2 + (a - 2)x - 1 \geq 0$ 的解集为空集, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $\left[-2, \frac{6}{5}\right]$

B. $\left[-2, \frac{6}{5}\right)$

C. $\left(-\frac{6}{5}, 2\right]$

D. $(-\infty, 2) \cup [2, +\infty)$

28. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 3$.

当 $a = 2$ 时, 若对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $1 \leq m \leq 2$, 总有 $f(x) - mt + 3t \geq 0$ 成立, 求实数 t 的取值范围 .



确定区间上恒成立问题

29. 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 不等式 $\frac{1}{8}(2t - t^2) \leq x^2 - 3x + 2 \leq 3 - t^2$ 恒成立, 则 t 的取值范围 _____ .

30. 已知对任意的 $x > 0$ 时不等式 $\frac{x}{x^2 + 3x + 1} \leq a$ 恒成立, 求 a 的取值范围 .

31. 已知函数 $f(x) = ax^2 + (a - 2)x - 2$.

(1) 若 $x \in [1, 3]$, $f(x) > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

(2) 若 $a \in [1, 3]$, $f(x) > 0$ 恒成立, 则实数 x 的取值范围是 _____ .

32. 设实数 $a \geq 1$, 使得不等式 $x|x - a| + \frac{3}{2} \geq a$ 对任意的实数 $x \in [1, 2]$ 恒成立, 则满足条件的实数 a 的取值范围是 _____ .



能成立问题

33. 若不等式 $x^2 + ax - 2 > 0$ 在区间 $[1, 5]$ 上有解, 则 a 的取值范围是 () .

A. $\left(-\frac{23}{5}, +\infty\right)$

B. $\left[-\frac{23}{5}, 1\right]$

C. $(1, +\infty)$

D. $\left(-\infty, -\frac{23}{5}\right)$