

04函数奇偶性

1. 函数的奇偶性

1.奇函数偶函数的定义

奇偶性	定义	图象特点
偶函数	对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有_____①	关于____②对称
奇函数	对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有_____③	关于____④对称

【备注】【答案】① $f(-x) = f(x)$ ；② y 轴；③ $f(-x) = -f(x)$ ；④原点

【教师备注】判断函数的奇偶性，首先应该判断函数**定义域是否关于原点对称**。
定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的一个**必要条件**。

2.奇函数偶函数的最值

一个奇函数在 $[a, b]$ 上的最大值为 M ，最小值为 m ，则它在 $[-b, -a]$ 上的最大值为_____①，最小值为_____②；

一个偶函数在 $[a, b]$ 上的最大值为 M ，最小值为 m ，则它在 $[-b, -a]$ 上的最大值为_____③，最小值为_____④；

【备注】【答案】① $-m$ ，② $-M$ ；③ M ，④ m ；

3.奇函数偶函数的单调性

奇函数在 $[a, b]$ 和 $[-b, -a]$ 上的单调性_____①，

偶函数在 $[a, b]$ 和 $[-b, -a]$ 上的单调性_____②。

【备注】【答案】①相同；②相反

2. 函数奇偶性的应用

奇偶性、单调性的判断

1. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2-|x+2|}$ 是_____函数（“奇”，“偶”，“非奇非偶”中选一合适的填空）

【答案】奇

【解析】由题意 $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 2-|x+2| \neq 0 \end{cases}$

$\therefore -1 \leq x \leq 1$, 且 $x \neq 0$, 关于原点对称,

$$\therefore f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2-|x+2|} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{-x},$$

$$\therefore f(-x) = -f(x),$$

$$\therefore \text{函数是 } f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2-|x+2|} \text{ 奇函数.}$$

【标注】【知识点】利用定义判断函数奇偶性

2. 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论中正确的是 () .

A. $f(x)g(x)$ 是偶函数

B. $|f(x)|g(x)$ 是奇函数

C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数

D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

【答案】C

【解析】 $\because f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x),$$

$$f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x), \text{ 故函数是奇函数, 故A错误;}$$

$$|f(-x)| \cdot g(-x) = |f(x)| \cdot g(x) \text{ 为偶函数, 故B错误;}$$

$$f(-x) \cdot |g(-x)| = -f(x) \cdot |g(x)| \text{ 是奇函数, 故C正确;}$$

$$|f(-x) \cdot g(-x)| = |f(x) \cdot g(x)| \text{ 为偶函数, 故D错误;}$$

故选C.

【标注】【知识点】函数奇偶性的运算

3. 下列函数中, 既是奇函数, 又在 $(0, +\infty)$ 单调递增的是 () .

A. $f(x) = -2x$

B. $f(x) = \frac{1}{x}$

C. $f(x) = x^3$

D. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

【答案】C

【解析】A 选项: $f(x) = -2x$ 在 $(0, +\infty)$ 为减函数, 故A错误;

B 选项: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 为减函数, 故B错误;

C 选项: $f(x) = x^3$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数, 故C正确;

D 选项:

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 为减函数, 在 $[1, +\infty)$ 为增函数, 故 D 错误.

故选 C.

【标注】【知识点】利用定义判断函数奇偶性; 函数单调性与奇偶性综合问题; 判断复合函数单调性

4. 已知函数 $f(x) = -x|x| + 2x$, 则下列结论正确的是 ().

- A. $f(x)$ 是偶函数, 递增区间是 $(-\infty, 0)$
- B. $f(x)$ 是偶函数, 递减区间是 $(-\infty, -1)$
- C. $f(x)$ 是奇函数, 递增区间是 $(-\infty, -1)$
- D. $f(x)$ 是奇函数, 递增区间是 $(-1, 1)$

【答案】 D

【解析】 $\because f(x) = -x|x| + 2x$

$$f(-x) = -(-x)|-x| + 2(-x)$$

$$= x|x| - 2x = -f(x)$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数,

当 $x \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 2x \\ &= -(x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

当 $x \in [0, 1]$ 为增函数,

当 $x \leq 0$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= -x(-x) + 2x \\ &= x^2 + 2x \\ &= (x+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $x \in (-1, 0]$ 为增函数.

故选 D.

【标注】【知识点】单调性; 函数单调性与奇偶性综合问题; 利用定义判断函数奇偶性

5. 下列判断中哪些是不正确的 ().

- A. $f(x) = (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 是偶函数
- B. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ -x^2 + x & (x > 0) \end{cases}$ 是奇函数
- C. $f(x) = \sqrt{3-x^2} + \sqrt{x^2-3}$ 是偶函数
- D. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+3|-3}$ 是非奇非偶函数

【答案】AD

【解析】A 选项： $f(x) = (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ，

$$\text{故 } \frac{1+x}{1-x} \geq 0,$$

$$\text{解得：} -1 \leq x < 1,$$

$\therefore x$ 的定义域不关于原点对称，

故 $f(x)$ 不可能是偶函数，

故A错误；

$$\text{B 选项：} f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ -x^2 + x & (x > 0) \end{cases},$$

当 $x > 0$ 时， $-x < 0$ ，

$$\text{则 } f(x) = -x^2 + x = -[(-x)^2 + (-x)] = -f(-x),$$

当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ，

$$\text{则 } f(x) = x^2 + x = -[-(-x)^2 + (-x)] = -f(-x),$$

故 $f(x)$ 是奇函数，

故B正确；

$$\text{C 选项：} f(x) = \sqrt{3-x^2} + \sqrt{x^2-3},$$

$$\text{则 } \begin{cases} 3-x^2 \geq 0 \\ x^2-3 \geq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得：} x = \pm 3,$$

$$\text{且 } f(3) = f(-3) = 0,$$

故 $f(x)$ 是偶函数，

故C正确；

$$\text{D 选项：} f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+3|-3},$$

$$\text{则 } \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ |x+3|-3 \neq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得：} x \in [-1, 0) \cup (0, 1],$$

$$\text{则 } f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+3-3} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$f(-x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{-x} = -f(x),$$

故 $f(x)$ 是奇函数，

故D错误；

故选AD.

【标注】【知识点】利用定义判断函数奇偶性

6. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) = (\quad)$.

A. $e^{-x} - 1$

B. $e^{-x} + 1$

C. $-e^{-x} - 1$

D. $-e^{-x} + 1$

【答案】 D

【解析】 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $f(-x) = e^{-x} - 1$,

又 $f(x)$ 为奇函数, 有 $f(x) = -f(-x) = -e^{-x} + 1$.

故选D.

【标注】【知识点】利用函数奇偶性求函数解析式

7. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 4x + m, & x \geq 0 \\ g(x), & x < 0 \end{cases}$, 则 m 的值为 _____ ; $g(x) =$ _____ .

【答案】 $m = 0$; $g(x) = -4x^2 - 4x$

【解析】 $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数,

$$\therefore f(0) = 0,$$

$$\therefore m = 0,$$

$$\text{令 } x < 0, -x > 0,$$

$$f(-x) = 4(-x)^2 - 4(-x),$$

$$= 4x^2 + 4x,$$

又 $\because f(x)$ 为奇函数,

$$\therefore f(x) = -f(-x) = -4x^2 - 4x,$$

$$\therefore g(x) = -4x^2 - 4x.$$

故答案为: $m = 0$; $g(x) = -4x^2 - 4x$.

【标注】【知识点】利用函数奇偶性求函数解析式

赋值运算

8. 若 $f(x) = ax^3 + x + c$ 在 $[a, b]$ 上是奇函数, 则 $a + b + c + 2$ 的值为 () .

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

【答案】 D

【解析】 $\because$ 奇函数的定义域关于原点对称, 所以 $a + b = 0$,

$\because$ 奇函数的图象关于原点对称,

$\therefore f(-x) = -f(x)$,
 即 $ax^2 - x + c = -ax^2 - x - c$,
 $\therefore 2ax^2 + 2c = 0$ 对任意的 x 都成立 ,
 $\therefore a = c = 0$, 则 $b = 0$.
 $\therefore a + b + c + 2 = 2$.
 故选 D .

【标注】【知识点】利用函数奇偶性求函数解析式；利用定义判断函数奇偶性

9. 已知 $y = f(x) + x^2$ 是奇函数 , 且 $f(1) = 1$. 若 $g(x) = f(x) + 2$, 则 $g(-1) =$ ____ .

【答案】 -1

【解析】 因为函数 $y = f(x) + x^2$ 为奇函数 ,
 所以 $g(1) = f(1) + 2$, 又 $f(1) = 1$,
 所以 $g(1) = 3$, $f(-1) = -3$,
 $g(-1) = f(-1) + 2 = -3 + 2 = -1$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】函数奇偶性的运算

10. 已知 $f(x) = ax^3 + bx - 4$, 其中 a, b 为常数 , 若 $f(-2) = 2$, 则 $f(2)$ 的值等于 () .

A. -2

B. -4

C. -6

D. -10

【答案】 D

【解析】 $f(-2) = -8a - 2b - 4 = 2$, $\therefore 8a + 2b = -6$
 $\therefore f(2) = 8a + 2b - 4 = -6 - 4 = -10$.

【标注】【知识点】利用定义判断函数奇偶性

11. 已知函数 $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 8$, 且 $f(-3) = 6$, 则 $f(3) =$ ____ .

【答案】 10

【解析】 设 $h(x) = ax^5 + bx^3 + cx$,
 则 $h(-x) = -ax^5 - bx^3 - cx = -h(x)$,
 所以 $h(x)$ 是奇函数 ,
 则 $f(-3) = h(-3) + 8 = 6$,

所以 $h(-3) = -2 = -h(3)$,

故 $h(3) = 2$,

则 $f(3) = h(3) + 8 = 10$.

故答案为 : 10 .

【标注】【知识点】利用定义判断函数奇偶性

12. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上奇函数 , $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上偶函数 , 且 $f(0) + f(-2) + g(0) + g(2) = 4$,

$f(2) + g(0) + g(-2) = -2$, 则 $f(2)$ 的值为 () .

A. -3

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 A

【解析】 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 ,

$\therefore f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$,

$g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 ,

$g(-x) = g(x)$,

$$\begin{cases} f(0) + f(-2) + g(0) + g(2) = 4 \\ f(2) + g(0) + g(-2) = -2 \end{cases} ,$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -f(2) + g(0) + g(2) = 4 \text{ ①} \\ f(2) + g(0) + g(2) = -2 \text{ ②} \end{cases} ,$$

② - ① 得 $2f(2) = -2 - 4$,

$f(2) = -3$.

故选 A .

【标注】【知识点】函数奇偶性的运算

解不等式

13. 设定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减 , 若 $f(1 - m) < f(m)$, 则 m 的取值范围是 _____ .

【答案】 $-1 \leq m < \frac{1}{2}$

【解析】 由题意结合函数的单调性和函数的定义域可得关于实数 m 的不等式组 :

$$\begin{cases} |1 - m| > |m| \\ -2 \leq 1 - m \leq 2 \\ -2 \leq m \leq 2 \end{cases} ,$$

求解不等式组可得实数 m 的取值范围是 : $-1 \leq m < \frac{1}{2}$,

故答案为 $-1 \leq m < \frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】单调性

14. 定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数 $f(x)$ 是增函数, 且 $f(a) + f(2a^2 - 1) < 0$, 则 a 的取值范围为 _____ .

【答案】 $(-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$

【解析】 $f(a) + f(2a^2 - 1) < 0$,
即 $f(2a^2 - 1) < -f(a)$,
又 $f(x)$ 为奇函数,
 $\therefore -f(a) = f(-a)$,
即 $f(2a^2 - 1) < f(-a)$,
又 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增,
 $\therefore -1 < 2a^2 - 1 < -a < 1$,
解得 $-1 < a < 0$ 或 $0 < a < \frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】单调性

15. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是增函数, 且 $f(-3) = 0$, 则不等式 $x \cdot f(x) < 0$ 的解集是 _____ .

【答案】 $(0, 3) \cup (-3, 0)$

【解析】当 $x > 0$ 时,
 $\because xf(x) < 0$,
 $\therefore f(x) < 0$,
 $\because f(x)$ 是奇函数,
 $\therefore f(3) = -f(-3) = 0$,
又 $\because f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增,
 $\therefore 0 < x < 3$.
当 $x < 0$ 时,
 $\because xf(x) < 0$,
 $\therefore f(x) > 0$,
 $\because f(x)$ 为奇函数,
又 $\because f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增,
 $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单增,
又 $\because f(-3) = 0$,
 $\therefore -3 < x < 0$,

$$\therefore (0, 3) \cup (-3, 0) .$$

【标注】【知识点】根据奇偶性确定图象；函数单调性与奇偶性综合问题

16. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 - 4x$ ，则不等式 $xf(x) < 0$ 的解集为（ ）。

A. $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

B. $(-4, 0) \cup (4, +\infty)$

C. $(-4, 0) \cup (0, 4)$

D. $(-4, 4)$

【答案】 C

【解析】 根据题意，设 $x < 0$ ，则 $-x > 0$ ，

$$\text{则 } f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) = x^2 + 4x ,$$

又由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则：

$$f(x) = -f(-x) = -x^2 - 4x ,$$

$$\text{则 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, (x \geq 0) \\ -x^2 - 4x, (x < 0) \end{cases} ' ,$$

当 $x \geq 0$ 时，

$$xf(x) = x(x^2 - 4x) = x^2(x - 4) , \quad xf(x) < 0 .$$

$$\text{即 } x^2(x - 4) < 0 ,$$

$$\text{解得： } x < 4 , \text{ 且 } x \neq 0 ,$$

$$\text{综上： } 0 < x < 4 .$$

当 $x < 0$ 时，

$$xf(x) = x(-x^2 - 4x) = -x^2(x + 4) , \quad xf(x) < 0 .$$

$$\text{即 } -x^2(x + 4) < 0 ,$$

$$\text{解得： } x > -4 .$$

$$\text{综上： } -4 < x < 0 .$$

$$\text{故不等式 } xf(x) < 0 \text{ 的解集为 } (-4, 0) \cup (0, 4) .$$

故选C .

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式；函数单调性与奇偶性综合问题

17. 已知函数 $f(x)$ 为奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x)$ 单调递增，且 $f(1) = 0$ ，若 $f(x - 1) > 0$ ，则 x 的取值范围为（ ）。

A. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$

B. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$

C. $\{x | 0 < x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$

D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$

【答案】 C

【解析】∵定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(1) = 0$,

∴函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且 $f(-1) = 0$,

$$\therefore -1 < x < 0 \text{ 或 } x > 1 \text{ 时, } f(x) > 0,$$
$$\because f(x-1) > 0,$$
$$\therefore -1 < x - 1 < 0 \text{ 或 } x - 1 > 1,$$
$$\therefore \{x | 0 < x < 1 \text{ 或 } x > 2\} .$$

故选C.

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式；函数单调性与奇偶性综合问题

18. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$, 当 $a, b \in (-\infty, 0)$ 时总有 $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} > 0 (a \neq b)$, 若 $f(m+1) > f(2m)$, 则实数 m 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是偶函数.

又: 当 $a, b \in (-\infty, 0)$ 时总有 $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} > 0 (a \neq b)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增函数.

根据偶函数的性质可知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减函数,

$$\because f(m+1) > f(2m),$$
$$\therefore f(|m+1|) > f(|2m|), \text{ 即 } |m+1| < |2m|.$$

则 $(m+1)^2 < 4m^2$, $(3m+1)(1-m) < 0$, $m > 1$ 或 $m < -\frac{1}{3}$,

解得 $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$.

故答案为 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$.

【标注】【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题

19. 设奇函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $f(1) = 0$, 则不等式 $\frac{3f(x) - 2f(-x)}{5x} < 0$ 的解集为 ().
- A. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
- C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

【答案】 D

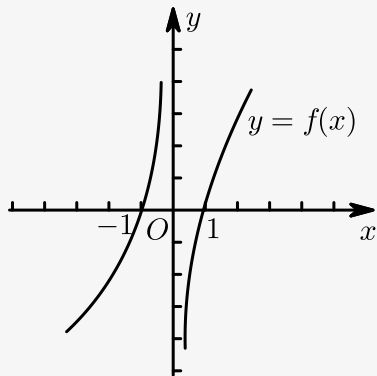
【解析】方法一：奇函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上，

在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，且 $f(1) = 0$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的关于原点对称，

且在 $(-\infty, 0)$ 上也是增函数，过点 $(-1, 0)$ ，

所以可将函数 $f(x)$ 的图像画出，大致如下：



$\therefore f(-x) = -f(x)$ ，

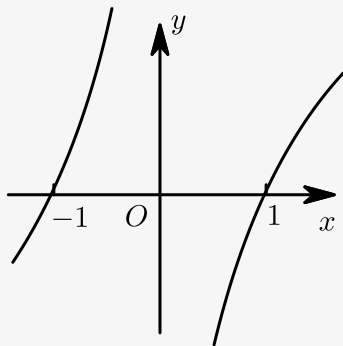
$\therefore$ 不等式 $\frac{3f(x) - 2f(-x)}{5x} < 0$ 可化为 $\frac{f(x)}{x} < 0$ ，

即 $xf(x) < 0$ ，不等式的解集即为自变量与函数值异号的 x 的范围，

据图像可以知道 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 。

故选D。

方法二：由题意，做草图， $\frac{3f(x) - 2f(-x)}{5x} < 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} < 0$ ，



当 $x > 0$ 时， $f(x) < 0$ ，由图得， $0 < x < 1$ ，

当 $x < 0$ 时， $f(x) > 0$ ，由图得， $-1 < x < 0$ ，

综上所述， $0 < x < 1$ 或 $-1 < x < 0$ 。

故选D。

【标注】【素养】逻辑推理

【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题

【知识点】对称性

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \leq 0$ 时 $f(x) = x^2$, 对任意的 $x \in [a-1, a+1]$, 恒有 $f(x+2a) \geq 3f(x)$, 则实数 a 的最大值为 _____ .

【答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】 由题意知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减,

又 $f(\sqrt{3}x) = 3f(x)$, 所以 $f(x+2a) \geq 3f(x)$, 即 $f(x+2a) \geq f(\sqrt{3}x)$,

所以 $x+2a \leq \sqrt{3}x$, 即 $2a \leq (\sqrt{3}-1)x$ 在 $x \in [a-1, a+1]$ 上恒成立,

所以 $2a \leq (\sqrt{3}-1)(a-1)$, 即 $(3-\sqrt{3})a \leq -(\sqrt{3}-1)$, 解得 $a \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【标注】 【知识点】 不等式中的恒成立与能成立问题; 单调性; 函数单调性与奇偶性综合问题

综合应用

21. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2+2}{mx+n}$ 是奇函数, 且 $f(1) = 3$, 其中 $m, n \in \mathbf{R}$.

(1) 求 m 和 n 的值.

(2) 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{2}]$ 上的单调性, 并加以证明.

【答案】 (1) $m = 1, n = 0$.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{2}]$ 上为增函数, 证明见解析.

【解析】 (1) 根据题意, $f(x) = \frac{x^2+2}{mx+n}$ 是奇函数,

则 $f(-x) = -f(x)$,

即 $\frac{x^2+2}{-mx+n} = -\frac{x^2+2}{mx+n}$,

分析可得: $n = 0$,

又由 $f(1) = 3$,

则 $f(1) = \frac{1+2}{m} = 3$, 解可得 $m = 1$,

故 $m = 1, n = 0$.

(2) 由(1)的结论, $f(x) = \frac{x^2+2}{x} = x + \frac{2}{x}$, 在 $(-\infty, -\sqrt{2}]$ 上为增函数,

设 $x_1 < x_2 \leq -\sqrt{2}$,

$f(x_1) - f(x_2) = \left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = (x_1 - x_2) \frac{x_1 x_2 - 2}{x_1 x_2}$

又由 $x_1 < x_2 \leq -\sqrt{2}$,

则 $x_1 - x_2 < 0, 0 < x_1 x_2 < 2$,

则有 $f(x_1) - f(x_2) < 0$,

故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{2}]$ 上为增函数.

【标注】【知识点】利用函数奇偶性求函数解析式；用定义法证明函数的单调性

22. 已知 $f(x) = \frac{x+a}{x^2+bx+1}$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式.

(2) 判断并证明 $f(x)$ 的单调性.

【答案】(1) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

(2) $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单增, 证明见解析.

【解析】(1) $\because f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是奇函数,

$$\therefore f(0) = 0,$$

$$\therefore 0 + a = 0,$$

$$\therefore a = 0,$$

$$\therefore f(x) = \frac{x}{x^2+bx+1},$$

$$f(-x) = \frac{-x}{x^2-bx+1},$$

$$\therefore \frac{x}{x^2+bx+1} + \frac{-x}{x^2-bx+1} = 0,$$

$$\therefore b = 0,$$

$$\therefore f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

(2) $\forall x_1, x_2 \in [-1, 1],$

不妨设 $x_1 < x_2, \therefore x_1x_2 < 1$

$$f(x_1) - f(x_2)$$

$$= \frac{x_1}{x_1^2+1} - \frac{x_2}{x_2^2+1}$$

$$= \frac{x_1x_2^2+x_1-x_1^2x_2-x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$$

$$= \frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} < 0,$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2),$$

$\therefore f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单增.

【标注】【知识点】用定义法证明函数的单调性

|| 精进不休 日新月异

23. 设函数 $f(x)$ 是增函数, 对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(1) 求 $f(0)$.

(2) 证明 $f(x)$ 奇函数.

(3) 解不等式 $\frac{1}{2}f(x^2) - f(x) > \frac{1}{2}f(3x)$.

【答案】 (1) $f(0) = 0$.

(2) 证明见解析.

(3) $\{x|x < 0 \text{ 或 } x > 5\}$.

【解析】 (1) 由题设, 令 $x = y = 0$,

恒等式可变为 $f(0+0) = f(0) + f(0)$, 解得 $f(0) = 0$.

(2) 令 $y = -x$, 则由 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 得,

$$f(0) = 0 = f(x) + f(-x),$$

$$\text{即得 } f(-x) = -f(x),$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 由 $\frac{1}{2}f(x^2) - f(x) > \frac{1}{2}f(3x)$,

$$f(x^2) - f(3x) > 2f(x),$$

$$\text{即 } f(x^2) + f(-3x) > 2f(x),$$

$$\text{又由已知 } f(x+y) = f(x) + f(y),$$

$$\text{得: } f[2(x)] = 2f(x),$$

$$\therefore f(x^2 - 3x) > f(2x),$$

由函数 $f(x)$ 是增函数, 不等式转化为 $x^2 - 3x > 2x$,

$$\text{即 } x^2 - 5x > 0,$$

$\therefore$ 不等式的解集 $\{x|x < 0 \text{ 或 } x > 5\}$.

【标注】【知识点】函数的定义; 抽象函数; 利用函数单调性解不等式; 用定义法证明函数的单调性; 奇偶性

24. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 且 $f(1) = 1$, 若 $a, b \in [-1, 1]$, $a + b \neq 0$ 时, 有

$$\frac{f(a) + f(b)}{a + b} > 0 \text{ 成立.}$$

(1) 判断 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的单调性, 并证明.

(2) 解不等式: $f(2x - 1) < f(1 - 3x)$.

(3) 若 $f(x) \leq m^2 - 2am + 1$ 对所有的 $a \in [-1, 1]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) 在上单调递增, 证明见解析.

$$(2) \left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{2}{5}\right\}.$$

(3) $m = 0$ 或 $m \leq -2$ 或 $m \geq 2$.

【解析】 (1) 任取 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $-x_2 \in [-1, 1]$,

$\therefore f(x)$ 为奇函数,

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + f(-x_2) = \frac{f(x_1) + f(-x_2)}{x_1 + (-x_2)} \cdot (x_1 - x_2),$$

由已知得 $\frac{f(x_1) + f(-x_2)}{x_1 + (-x_2)} > 0$, $x_1 - x_2 < 0$,

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

$\therefore f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增.

(2) $\because f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,

$$\therefore \begin{cases} -1 \leq 2x - 1 \leq 1 \\ -1 \leq 1 - 3x \leq 1, \\ 2x - 1 < 1 - 3x \end{cases}$$

$\therefore$ 不等式的解集为 $\left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{2}{5}\right\}$.

(3) $\because f(1) = 1$, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,

$\therefore$ 在 $[-1, 1]$ 上, $f(x) \leq 1$, 问题转化为 $m^2 - 2am + 1 \geq 1$,

即 $m^2 - 2am \geq 0$, 对 $a \in [-1, 1]$ 恒成立,

下面来求 m 的取值范围. 设 $g(a) = -2m \cdot a + m^2 \geq 0$,

①若 $m = 0$, 则 $g(a) = 0 \geq 0$, 对 $a \in [-1, 1]$ 恒成立;

②若 $m \neq 0$, 则 $g(a)$ 为 a 的一次函数, 若 $g(a) \geq 0$, 对 $a \in [-1, 1]$ 恒成立,

必须 $g(-1) \geq 0$ 且 $g(1) \geq 0$,

$\therefore m \leq -2$ 或 $m \geq 2$,

综上, $m = 0$ 或 $m \leq -2$ 或 $m \geq 2$.

【标注】【知识点】 利用函数单调性解不等式; 二次函数相关的恒成立问题