

03函数单调性练习题

🕒 单调性的判断

1. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 则下列结论一定正确的是() .

- A. $y = \frac{1}{f(x)}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数
- B. $y = |f(x)|$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数
- C. $y = -f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数
- D. $y = \sqrt{f(x)}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数

【答案】 C

【解析】 A 选项: 反例: $f(x) = x$,

$y = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 增, 在 $(0, +\infty)$ 增, A错;

B 选项: 反例: $f(x) = x$,

$y = |f(x)| = |x|$ 先减后增, B错;

C 选项: $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上增,

$\therefore y = -f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上减,

$\therefore$ C对;

D 选项: 反例: $f(x) = x$,

$y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x}$ 定义域不是 $\mathbf{R}$, D错.

故选 C .

【标注】 【知识点】 判断复合函数单调性; 抽象函数单调性

🕒 单调性的证明

2. 已知函数 $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

证明函数在 $[1, +\infty)$ 上单调递增 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 在 $[1, +\infty)$ 上任取 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{2x_1+1}{x_1+1} - \frac{2x_2+1}{x_2+1} \\ &= \frac{(2x_1+1)(x_2+1) - (2x_2+1)(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} , \end{aligned}$$

$\therefore 1 < x_1 < x_2$,
 $\therefore x_1 + 1 > 0, x_2 + 1 > 0, x_1 - x_2 < 0$,
 $\therefore$ 原式 < 0 , 即 $f(x_1) < f(x_2)$,
 又 $\because x_1 < x_2$,
 $\therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增 .

【标注】【知识点】用定义法证明函数的单调性；利用单调性求函数最值；不等式的性质

3. 设函数 $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$, 且 $f(1) = 2, f(2) = \frac{5}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式 .

(2) 利用定义判断 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上的单调性 .

【答案】 (1) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上单调递增 .

【解析】 (1) 根据题意, 函数 $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$, 且 $f(1) = 2, f(2) = \frac{5}{2}$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{a+b}{1} = 2 \\ \frac{4a+b}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} ,$$

解可得 $a = 1, b = 1$,

$$\text{则} f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} .$$

(2) 设 $x_1 > x_2 \geq 2$,

$$\text{则} f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^2 + 1}{x_1} - \frac{x_2^2 + 1}{x_2} = \frac{(x_1 x_2 - 1)(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} ,$$

又由 $x_1 > x_2 \geq 2$,

则 $(x_1 - x_2) > 0, x_1 x_2 - 1 > 0$,

则 $f(x_1) - f(x_2) > 0$,

则函数 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上单调递增 .

【标注】【知识点】用待定系数法求解析式；解析法；用定义法证明函数的单调性

求解函数的最值

4. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 4$.

设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x} (1 \leq x \leq 5)$, 若 $g(x)$ 的最小值为 2 , 求 $g(x)$ 的最大值 .

【答案】 (1) $\frac{19}{5}$.

【解析】 (1) 方法一：因为函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x} (1 \leq x \leq 5)$,

$$\text{所以 } g(x) = \frac{x^2 - ax + 4}{x} = x + \frac{4}{x} - a,$$

因为 $y = x + \frac{4}{x}$ 为对勾函数,

所以函数 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上为减函数, 在 $[2, 5]$ 上为增函数,

故当 $x = 2$ 时, $g(x)$ 取得最小值 $g(2) = 4 - a$,

所以 $4 - a = 2$, 则 $a = 2$,

$$\text{又 } g(1) = 3, g(5) = \frac{19}{5},$$

$$\text{所以 } g(x)_{\max} = \frac{19}{5}.$$

$$\text{方法二: 因为 } g(x) = \frac{x^2 - ax + 4}{x}$$

$$= x + \frac{4}{x} - a$$

$$\geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} - a$$

$$= 4 - a,$$

当且仅当 $x = \frac{4}{x}$ 时取等号, 即 $x = 2$ 取最小值,

所以 $4 - a = 2$, 解得 $a = 2$,

又函数 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上为减函数, 在 $[2, 5]$ 上为增函数,

$$\text{又 } g(1) = 3, g(5) = \frac{19}{5},$$

$$\text{所以 } g(x)_{\max} = \frac{19}{5}.$$

【标注】【知识点】利用单调性求函数最值; 已知函数的最值求参数; 一元二次不等式; 利用基本不等式求最值

复合函数单调性

5. 判断下列函数的单调性:

$$(1) y = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

$$(2) y = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

【答案】 (1) 增区间为: $(-\infty, 0)$, 减区间为: $(0, +\infty)$.

(2) 增区间为: $(-\infty, -1)$ 和 $(-1, 0)$, 减区间为: $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$.

【解析】 (1) 外层函数为 $y = \frac{1}{u}$, 单调递减, 内层函数为 $u = x^2 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以复合函数增区间为: 增区间为: $(-\infty, 0)$, 减区间为: $(0, +\infty)$.

(2) 定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, 外层函数为 $y = \frac{1}{u}$, 单调递减, 内层函数为 $u = x^2 - 1$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以复合函数增区间为: $(-\infty, -1)$ 和 $(-1, 0)$, 减区间为: $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$.

【标注】【知识点】判断复合函数单调性；复合函数

6. 判断下列函数的单调性 .

$$y = \sqrt{x+1} .$$

【答案】 (1) 单调增区间： $[-1, +\infty)$.

【解析】 (1) 函数定义域为 $[-1, +\infty)$ ，根据复合函数单调性判断原则，函数在定义域上单调递增 .

【标注】【知识点】判断复合函数单调性

7. 函数 $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ 的单调递增区间是 () .

- A. $[4, +\infty)$
B. $\left[\frac{5}{2}, 4\right)$
C. $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$
D. $\left[1, \frac{5}{2}\right), [4, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 令 $x^2 - 5x + 4 \geq 0$,

解得 $x \geq 4$ 或 $x \leq 1$,

而函数 $y = x^2 - 5x + 4$ 的对称轴是： $x = \frac{5}{2}$,

由复合函数同增异减的原则，

故函数 $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ 的单调区间为 $[4, +\infty)$,

故选A .

【标注】【知识点】判断复合函数单调性

8. 函数 $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ 的单调减区间为 () .

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[-1, 2]$ C. $[2, +\infty)$ D. $[2, 5]$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 函数 $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ 的定义域为 $[-1, 5]$,

函数 $y = \sqrt{u}$ 为增函数 ,

函数 $u = -x^2 + 4x + 5$ 在 $[2, 5]$ 上为减函数 ,

$$f(x) = (2a-1)x - 3a + 6 \text{ 中 } x=1 \text{ 时, } f(x) = 5-a,$$

$$\therefore 5-a \geq 2a-1,$$

$$a \leq 2,$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 2,$$

综上所述, 答案选择: C.

【标注】【知识点】分段函数; 利用函数单调性解不等式

11. 给定函数 $f(x) = x^2$, $g(x) = x+2$, 对于 $\forall x \in \mathbf{R}$, 用 $M(x)$ 表示 $f(x)$, $g(x)$ 中的较大者, 记为

$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, 则 $M(x)$ 的最小值为 ().

A. -1

B. 1

C. 2

D. 4

【答案】 B

【解析】 当 $f(x) \geq g(x)$, 即 $x^2 \geq x+2$ 时, 可解得: $x \geq 2$ 或 $x \leq -1$.

当 $f(x) < g(x)$ 时, 即 $x^2 < x+2$.

解得 $-1 < x < 2$,

$$\therefore M(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -1 \\ x+2, & -1 < x < 2 \end{cases},$$

当 $x \geq 2$ 时, $y = x^2$ 在 $[2, +\infty)$ 为增函数,

$\therefore$ 当 $x=2$ 时, y 最小为 4.

当 $x \leq -1$ 时, $y = x^2$ 在 $(-\infty, -1]$ 为减函数,

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时, y 最小为 1.

当 $-1 < x < 2$ 时, $y = x+2$ 在 $(-1, 2)$ 为增函数,

$\therefore y \in (1, 4)$,

综上, $M(x)$ 最小值为 1.

故选 B.

【标注】【知识点】max 函数; 利用单调性求函数最值

根据函数单调性求解参数取值范围

12. 已知函数 $y = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在 $(-\infty, 4]$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是 ().

A. $[-3, +\infty)$

B. $(-\infty, -3]$

C. $(-\infty, 5]$

D. $[3, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 对称轴 $x = -\frac{b}{2a} = -(a-1) \geq 4$,

解得 $a \leq -3$.

故选B.

【标注】【知识点】二次函数的图象及性质

13. 若 $f(x) = -x^2 + 2ax$ 与 $g(x) = \frac{a}{x+1}$ 在区间 $[1, 2]$ 上都是减函数, 则 a 的取值范围是().

A. $(-1, 0) \cup (0, 1]$

B. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

C. $(0, 1)$

D. $(0, 1]$

【答案】D

【解析】 $f(x) = -(x-a)^2 + a^2$,

当 $a \leq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数;

$$g(x) = \frac{a}{x+1},$$

当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数,

则 a 的取值范围是 $0 < a \leq 1$,

故选D.

【标注】【知识点】已知函数单调性求参数范围

14. 已知 $f(x) = \frac{x}{x-a} (x \neq a)$

(1) 若 $a = -2$, 试证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增.

(2) 若 $a > 0$ 且 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $(0, 1]$.

【解析】(1) 当 $a = -2$ 时, $f(x) = \frac{x}{x+2} (x \neq -2)$.

设任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, -2)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1+2} - \frac{x_2}{x_2+2} = \frac{2(x_1-x_2)}{(x_1+2)(x_2+2)}.$$

$\because x_1, x_2 \in (-\infty, -2)$, 且 $x_1 < x_2$,

$\therefore (x_1+2)(x_2+2) > 0$, $x_1 - x_2 < 0$,

$\therefore f(x_1) < f(x_2)$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增.

(2) 任取 $1 < x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1-a} - \frac{x_2}{x_2-a} = \frac{a(x_1-x_2)}{(x_1-a)(x_2-a)}$,

因为 $a > 0$, $x_2 - x_1 > 0$,

所以要使 $f(x_1) - f(x_2) > 0$,

只需 $(x_1-a)(x_2-a) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $a \leq 1$,

综上所述, a 的取值范围是 $(0, 1]$.

【标注】【知识点】已知函数单调性求参数范围

解不等式

15. 若定义在 $[-1, 1]$ 上的增函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1) < f(1-3x)$, 则实数 x 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\left\{x \mid 0 \leq x < \frac{1}{2}\right\}$

【解析】 $\because f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的增函数,

且 $f(x-1) < f(1-3x)$,

$$\therefore \begin{cases} -1 \leq x-1 \leq 1 \\ -1 \leq 1-3x \leq 1, \\ x-1 < 1-3x \end{cases}$$

解得 $0 \leq x < \frac{1}{2}$,

$\therefore x$ 的取值范围 $\left\{x \mid 0 \leq x < \frac{1}{2}\right\}$.

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式

16. 已知函数 $f(x)$ 满足: 对定义域内任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$ 成立.

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 且有 $f(a^2 - 1) > f(2a + 2)$ 成立, 求 a 的取值范围.

(2) 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 求关于 x 的不等式 $f(mx^2 + 2mx) < f(x + 2)$ 的解集.

【答案】 (1) $[1, 3)$.

(2) ① $m = 0$ 时, 解集为 $\{x \mid x < -2\}$;

② $m > 0$ 或 $m < -\frac{1}{2}$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x > \frac{1}{m} \text{ 或 } x < -2\right\}$;

③ $-\frac{1}{2} < m < 0$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x > -2 \text{ 或 } x < \frac{1}{m}\right\}$.

【解析】 (1) 由 $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$, 得 $f(x)$ 是一个单减函数.

$$\text{由 } f(a^2 - 1) > f(2a + 2) \text{ 可得, } \begin{cases} a^2 - 1 < 2a + 2 \\ a^2 - 1 \geq 0 \\ 2a + 2 \geq 0 \end{cases},$$

解得: $1 \leq a < 3$,

$\therefore a$ 的取值范围 $[1, 3)$.

(2) 由 $f(mx^2 + 2mx) < f(x + 2)$,

得 $mx^2 + 2mx > x + 2$,

$\therefore (mx - 1)(x + 2) > 0$,

① $m = 0$ 时, $-(x + 2) > 0$, 解得 $x < -2$,

$$m \neq 0 \text{ 时, } m\left(x - \frac{1}{m}\right)(x+2) > 0;$$

$$\textcircled{2} m > 0 \text{ 时, } \frac{1}{m} > -2;$$

$$\therefore x > \frac{1}{m} \text{ 或 } x < -2;$$

$$\textcircled{3} m < 0,$$

$$1) \frac{1}{m} = -2 \text{ 时, 无解;}$$

$$2) \frac{1}{m} > -2 \text{ 时, } x > \frac{1}{m} \text{ 或 } x < -2;$$

$$3) \frac{1}{m} < -2 \text{ 时, } x > -2 \text{ 或 } x < \frac{1}{m}.$$

综上所述：① $m = 0$ 时，解集为 $\{x|x < -2\}$ ；

$$\textcircled{2} m > 0 \text{ 或 } m < -\frac{1}{2} \text{ 时, 解集为 } \left\{x \mid x > \frac{1}{m} \text{ 或 } x < -2\right\};$$

$$\textcircled{3} -\frac{1}{2} < m < 0 \text{ 时, 解集为 } \left\{x \mid x > -2 \text{ 或 } x < \frac{1}{m}\right\}.$$

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式；解不等式中的分类讨论；含字母系数的不等式