

05函数性质综合

定义域为R

1. 2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第10题3分 ★★

函数 $f(x) = \log_a \left(x^2 + ax + \frac{1}{4} \right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，则 $g(x) = a^{2x^2-x}$ 的单调递增区间是 () .

A. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ D. $(1, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 函数 $h(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，

$\therefore x^2 + ax + \frac{1}{4} > 0$ 恒成立，即 $a^2 - 1 < 0$ ，即 $-1 < a < 1$ ，

且 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $\therefore 0 < a < 1$ ，

令 $2x^2 - x = t$ ，

$\therefore g(t) = a^t$ 为增函数，

由复合函数的单调性：

只需求 $t = 2x^2 - x$ 的单调递减区间，

$\therefore t = 2x^2 - x$ 的单调增区间为 $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ ，

$\therefore f(x)$ 的单调增区间是 $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ ，

故选 A .

【标注】 【知识点】复合函数；判断复合函数单调性

值域为R

2. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第19题10分 ★★★

已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 2ax + 3)$.

(1) 若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ ，求实数 a 的取值范围 .

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上为增函数，求实数 a 的取值范围 .

【答案】 (1) $a \geq \sqrt{3}$ 或 $a \leq -\sqrt{3}$.

(2) $[1, 2]$.

【解析】 (1) 根据题意，函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 2ax + 3)$ ，

设 $t = x^2 - 2ax + 3$ ，则 $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ ，

若函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ ，对于 $t = x^2 - 2ax + 3$ ，必有 $\Delta = (-2a)^2 - 12 \geq 0$ ，

解可得： $a \geq \sqrt{3}$ 或 $a \leq -\sqrt{3}$.

(2) 设 $t = x^2 - 2ax + 3$, 则 $y = \log_{\frac{1}{3}} t$,

函数 $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ 为减函数 ,

若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上为增函数 ,

则函数 $t = x^2 - 2ax + 3$ 在 $(-\infty, 1)$ 上为减函数 , 且 $t = x^2 - 2ax + 3 > 0$ 在 $(-\infty, 1)$ 上恒成立 ,

即 $\begin{cases} a \geq 1 \\ 4 - 2a \geq 0 \end{cases}$, 解可得 $1 \leq a \leq 2$,

即 a 的取值范围为 $[1, 2]$.

【标注】【知识点】求复合函数的值域；判断复合函数单调性

最值问题

3. 2018~2019学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第8题 ★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(-x+9), & x \leq 1 \\ 2^x - 3m, & x > 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在最小值 , 则实数 m 的取值范围是 () .

- A. $m \leq -\frac{1}{3}$ B. $m \geq -\frac{1}{3}$ C. $m > -\frac{1}{3}$ D. $m < -\frac{1}{3}$

【答案】 A

【解析】 因为函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(-x+9), & x \leq 1 \\ 2^x - 3m, & x > 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在最小值 ,

所以 $\log_2(-1+9) \leq 2^1 - 3m$,

$\therefore m \leq -\frac{1}{3}$,

故选 A .

【标注】【知识点】函数求值问题；分段函数

4. 2018~2019学年12月天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期月考第21题12分 ★★★

已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-9, 9)$, 当 $x \in (-9, 0)$ 时 , $f(x) = -\log_3(-x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 9)$ 上的解析式 .

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 9)$ 上的值域 .

(3) 求 $h(x) = 2f^2(x) - mf(x) + 4$, $x \in [1, 3]$ 的最小值 .

【答案】 (1) 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 9)$ 上的解析式为 $f(x) = \log_3 x$.

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 9)$ 上的值域为 $(-\infty, 2)$.

(3) 当 $\frac{m}{4} \geq 1$ 时 , 即 $m \geq 4$ 时 , $h(x)_{\min} = 6 - m$,
当 $\frac{m}{4} \leq 0$ 时 , 即 $m \leq 0$ 时 , $h(x)_{\min} = 4$,

当 $0 < \frac{m}{4} < 1$ 时, 即 $0 < m < 4$ 时, $h(x)_{\min} = -\frac{m^2}{8} + 4$.

【解析】 (1) 当 $0 < x < 9$ 时, 有 $-x > 0$,

$$\therefore f(-x) = -\log_3 x,$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x),$$

$$\therefore -f(x) = -\log_3 x,$$

$$\therefore f(x) = \log_3 x.$$

(2) 由 (1) 知, $0 < x < 9$ 时, $f(x) = \log_3 x$,

又 $\therefore f(x) = \log_3 x$ 在 $x \in (0, 9)$ 单调递增, 且 $\log_3 9 = 2$,

$$\therefore f(x) \in (-\infty, 2),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 9)$ 上的值域为 $(-\infty, 2)$.

(3) $h(x) = 2(\log_3 x)^2 - m(\log_3 x) + 4$, $x \in [1, 3]$,

令 $t = \log_3 x$, 则 $t \in [0, 1]$,

设 $h(t) = 2t^2 - mt + 4$, $t \in [0, 1]$,

当 $\frac{m}{4} \geq 1$ 时, 即 $m \geq 4$ 时, $h(t)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减,

$$h(t)_{\min} = h(1) = 6 - m,$$

当 $\frac{m}{4} \leq 0$ 时, 即 $m \leq 0$ 时, $h(t)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

$$h(t)_{\min} = h(0) = 4,$$

当 $0 < \frac{m}{4} < 1$ 时, 即 $0 < m < 4$ 时, $h(t)$ 在 $[0, \frac{m}{4}]$ 上递减, 在 $[\frac{m}{4}, 1]$ 上递增,

$$h(t)_{\min} = h\left(\frac{m}{4}\right) = -\frac{m^2}{8} + 4.$$

【标注】 【知识点】二次函数的图象及性质; 求复合函数的值域; 用单调性观察法求值域; 利用函数奇偶性求函数解析式; 对数函数的图象及性质

5. 2020~2021 学年 12 月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第 21 题 ★★★

已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + \log_2 x = \log_2(ax + 1)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 解不等式 $f(x) > 1$.

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}} x$ 的解集中有且只有一个元素, 求 a 的值.

(3) 设 $a > 0$, 若对 $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 1, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) 见解析

(2) 见解析

(3) 见解析

【解析】(1) 解：由题意可得 $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2(\frac{1}{x} + 1) > 1 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$ ，得 $\frac{1}{x} + 1 > 2$ ，

解得 $\{x|0 < x < 1\}$ ，

所以不等式的解集为 $\{x|0 < x < 1\}$ 。

(2) 解：方程 $f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}}x$ 有且仅有一解，

即 $\log_2(ax + 1) - \log_2x = -2\log_2x$ 。

等价于 $ax^2 + x - 1 = 0$ 有且仅有一解，

且 $x > 0$ ， $ax + 1 > 0$ ，

当 $a = 0$ 时， $x = 1$ 符合题意；

当 $a \neq 0$ 时， $\Delta = 1 + 4a = 0$ ， $a = -\frac{1}{4}$

此时 $x = 2$ 满足题意，

综上， $a = 0$ 或 $a = -\frac{1}{4}$ 。

(3) 解：当 $0 < x_1 < x_2$ 时， $\frac{1}{x_1} + a > \frac{1}{x_2} + a$ ，

$$\log_2\left(\frac{1}{x_1} + a\right) > \log_2\left(\frac{1}{x_2} + a\right)$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值分别为

$f(t)$ ， $f(t+1)$ ，

$f(t) - f(t+1)$

$$= \log_2\left(\frac{1}{t} + a\right) - \log_2\left(\frac{1}{t+1} + a\right) \leq 1$$

即 $at^2 + (a+1)t - 1 \geq 0$ 对任意 $t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 恒成立，

因为 $a > 0$ ，所以函数 $y = at^2 + (a+1)t - 1$

在区间 $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 上单调递增，

所以 $t = \frac{1}{2}$ 时， y 有最小值 $\frac{3}{4}a - \frac{1}{2}$ ，

由 $\frac{3}{4}a - \frac{1}{2} \geq 0$ ，得 $a \geq \frac{2}{3}$

故 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ 。

【标注】【知识点】对数函数与分式函数复合

6. 2020~2021学年天津滨海新区塘沽第一中学高一上学期期中第23题14分 ★★★

设函数 $f(x) = x^2 - 2tx + 2$ ，且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称。

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上的最小值。

(2) 关于 x 的不等式 $f(x) - kx + 1 \geq 0$ 在 $[1, 4]$ 上有解，求实数 k 的取值范围。

(3) 设 $g(x) = 2^{f(x)+4x-3}$ ，若对于任意的 $x_1, x_2 \in [-2, 1]$ 都有 $|g(x_1) - g(x_2)| \leq M$ ，求 M 的最小值。

【答案】(1) 1.

(2) $k \leq \frac{11}{4}$.

(3) $\frac{15}{4}$.

【解析】(1) $\because f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,

$$\therefore t=1,$$

$$\text{即 } f(x) = x^2 - 2x + 2,$$

又 $f(x)$ 的图象开口向上,

$$\therefore f(x) \text{ 在区间 } [0, 4] \text{ 上的最小值为 } f(1) = 1.$$

(2) 设 $h(x) = f(x) - kx + 1 = x^2 - (k+2)x + 3$,

故 $h(x)$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = \frac{k+2}{2}$,

① 若 $\frac{k+2}{2} \leq \frac{5}{2}$, 即 $k \leq 3$,

$$\text{则 } h(x) \text{ 在 } [1, 4] \text{ 上的最大值为 } h(4) = 11 - 4k,$$

$$\text{令 } 11 - 4k \geq 0 \text{ 可得 } k \leq \frac{11}{4}.$$

② 若 $\frac{k+2}{2} > \frac{5}{2}$, 即 $k > 3$,

$$\text{则 } h(x) \text{ 在 } [1, 4] \text{ 上的最大值为 } h(1) = 2 - k,$$

$$\text{令 } 2 - k \geq 0 \text{ 可得 } k \leq 2, \text{ 与 } k > 3 \text{ 矛盾, 舍去.}$$

$$\text{综上, } k \leq \frac{11}{4}.$$

(3) 设 $t(x) = f(x) + 4x - 3 = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$,

$\therefore t(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递减, 在 $(-1, 1]$ 上单调递增,

$$\text{又 } t(-1) = -2, t(1) = 2,$$

$\therefore t(x)$ 在 $[-2, 1]$ 上的值域为 $[-2, 2]$,

$$\therefore \text{当 } t(x) = -2 \text{ 时, } g(x) = 2^{t(x)} \text{ 取得最小值 } \frac{1}{4},$$

$$\text{当 } t(x) = 2 \text{ 时, } g(x) = 2^{t(x)} \text{ 取得最大值 } 4,$$

$$\therefore M \text{ 的最小值为 } 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

【标注】【知识点】一个函数的自对称问题；定轴定区间求值域；二次函数相关的恒成立问题；动轴定区间求值域

判断函数的单调性、奇偶性求解不等式

7. 2019~2020学年广东广州越秀区高一上学期期末第22题12分 ★★★

已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

(2) 若对任意的 $x \in [-1, 3]$, 不等式 $f(x^2 - ax) + f(4) \leq 0$ 均成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $f(x)$ 为奇函数 .

(2) $[-5, 4]$.

【解析】 (1) $f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

$$\therefore f(-x) + f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$= \ln(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$= \ln 1 = 0 .$$

$$\therefore f(-x) = -f(x) ,$$

$f(x)$ 为奇函数 .

(2) 由 (1) 可知 : 函数 $f(x)$ 为奇函数 ,

$$f(x^2 - ax) + f(4) \leq 0 \Rightarrow f(x^2 - ax) \leq -f(4) = f(-4) .$$

$$\therefore f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 单调递减 ,}$$

所以 $x^2 - ax + 4 \geq 0$ 在 $x \in [-1, 3]$ 恒成立 ,

当 $x = 0$ 时 , $4 \geq 0$ 恒成立 , $a \in \mathbf{R}$,

当 $x \in [-1, 0)$ 时 , 则 $a \geq x + \frac{4}{x}$,

又 $y = x + \frac{4}{x}$ 在 $[-1, 0)$ 单调递减 ,

所以 $y_{\max} = -1 - 4 = -5$, 则 $a \geq -5$.

当 $x \in (0, 3]$ 时 , 则 $a \leq x + \frac{4}{x}$,

由 $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$ (当且仅当 $x = 2$ 时取等号) ,

所以 $\left(x + \frac{4}{x}\right)_{\min} = 4$, 故 $a \leq 4$,

所以 $a \in [-5, 4]$.

【标注】 【知识点】 利用定义判断函数奇偶性 ; 二次函数的图象及性质 ; 对数函数的图象及性质 ; 不等式中的恒成立与能成立问题

8. 2019~2020学年10月湖南长沙开福区长沙市第一中学高一上学期月考第20题12分 ★★

已知函数 $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性 , 并给出证明 .

(2) 判断函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性 .

(3) 解不等式 : $f(x^2 + x + 3) + f(-2x^2 + 4x - 7) > 0$.

【答案】 (1) 函数 $f(x)$ 为奇函数 ; 证明见解析 .

(2) $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递减 .

(3) $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

【解析】 (1) 由 $\frac{x+1}{x-1} > 0$,

解得 $x < -1$ 或 $x > 1$,

所以函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

对任意的 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

$$\begin{aligned} \text{有 } f(-x) &= \ln \frac{-x+1}{-x-1} \\ &= \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{-1} \\ &= -\ln \frac{x+1}{x-1} \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$ 为奇函数.

$$(2) \text{ 令 } g(x) = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1},$$

易知 $g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递减,

由复合函数的单调性可得 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递减.

$$(3) \text{ 由 } x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 1,$$

$$2x^2 - 4x + 7 = 2(x-1)^2 + 5 > 1,$$

$$\text{所以 } f(x^2 + x + 3) > -f(-2x^2 + 4x - 7) = f(2x^2 - 4x + 7),$$

$$\text{等价于 } x^2 + x + 3 < 2x^2 - 4x + 7,$$

$$\text{易得 } x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty).$$

【标注】【知识点】用定义法证明函数的单调性；利用函数单调性解不等式；利用定义判断函数奇偶性

● 值域型问题

9. 2017~2018学年天津河西区天津市新华中学高二下学期期中文科第14题4分 ★★★

已知函数 $g(x) = ax + 1$, $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2, & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ 对 $\forall x_1 \in [-2, 2]$, $\exists x_2 \in [-2, 2]$, 使 $g(x_1) = f(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $[-1, 1]$

【解析】 作出函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2, & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ 的图象如图:

则当 $x \in [-2, 2]$, $f(x)$ 的最大值为 $f(2) = 3$, 最小值 $f(-2) = -4$,

若 $a = 0$, $g(x) = 1$, 此时满足 $\forall x_1 \in [-2, 2]$, $\exists x_2 \in [-2, 2]$,

使 $g(x_1) = f(x_2)$ 成立,

若 $a \neq 0$, 则直线 $g(x)$ 过定点 $B(0, 1)$,

若 $a > 0$, 要使对 $\forall x_1 \in [-2, 2]$, $\exists x_2 \in [-2, 2]$,

使 $g(x_1) = f(x_2)$ 成立,

则满足 $g(x)_{\max} \leq f(x)_{\max}$, 且 $g(x)_{\min} \geq f(x)_{\min}$,

即 $2a+1 \leq 3$ 且 $-2a+1 \geq -4$,

即 $a \leq 1$ 且 $a \leq \frac{5}{2}$,

此时满足 $0 < a \leq 1$,

若 $a < 0$, 要使对 $\forall x_1 \in [-2, 2]$, $\exists x_2 \in [-2, 2]$, 使 $g(x_1) = f(x_2)$ 成立 ,

则满足 $g(x)_{\max} \leq f(x)_{\max}$, 且 $g(x)_{\min} \geq f(x)_{\min}$,

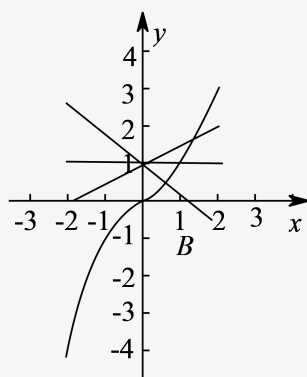
即 $2a+1 \leq 3$ 且 $-2a+1 \geq -4$,

即 $a \geq -1$ 且 $a \geq -\frac{5}{2}$,

此时满足 $-1 \leq a < 0$,

综上 $-1 \leq a \leq 1$,

故答案为 : $[-1, 1]$.



【标注】【知识点】分段函数；函数求值问题

恒成立问题

10. 2018~2019学年天津高一上学期期末新四区联考第19题 ★★★

已知函数 $f(x) = ma^x - a^{-x} (a > 1)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 .

(1) 求常数 m 的值 .

(2) 试判断函数 $f(x)$ 的单调性 , 并证明 .

(3) 不等式 $f\left(\log_2 \frac{x}{2} \cdot \log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x}}{2}\right) + f(k) \geq 0$ 对 $x \in [\sqrt{2}, 8]$ 恒成立 , 求实数 k 的取值范围 .

【答案】(1) $m = 1$.

(2) 证明见解析 .

(3) $k \geq \frac{1}{4}$.

【解析】(1) $\because f(x) = ma^x - a^{-x} (a > 1)$ 是奇函数 ,

$\therefore f(0) = 0$, 即 $m - 1 = 0$,

$\therefore m = 1$.

(2) 函数 $f(x)$ 是增函数 , 证明如下 :

设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$,

则 $f(x_1) - f(x_2) = a^{x_1} - a^{-x_1} - a^{x_2} + a^{-x_2}$

$= (a^{x_1} - a^{x_2}) + \left(\frac{1}{a^{x_2}} - \frac{1}{a^{x_1}}\right) = (a^{x_1} - a^{x_2}) \left(1 + \frac{1}{a^{x_1}a^{x_2}}\right)$,

$$\begin{aligned}
&\because a > 1, x_1 < x_2, \\
&\therefore a^{x_1} - a^{x_2} < 0, 1 + \frac{1}{a^{x_1} \cdot a^{x_2}} > 0, \\
&\therefore (a^{x_1} - a^{x_2}) \left(1 + \frac{1}{a^{x_1} a^{x_2}} \right) < 0, \\
&\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \\
&\therefore f(x) \text{ 是单调递增函数.} \\
(3) &\because f\left(\log_2 \frac{x}{2} \cdot \log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x}}{2}\right) + f(k) \geq 0, \\
&\therefore f\left(\log_2 \frac{x}{2} \cdot \log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x}}{2}\right) \geq -f(k), \\
&\text{又} \because f(x) \text{ 是奇函数,} \\
&\therefore f\left(\log_2 \frac{x}{2} \cdot \log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x}}{2}\right) \geq f(-k), \\
&\therefore f(x) \text{ 是 } \mathbf{R} \text{ 上的单调递增函数,} \\
&\therefore \log_2 \frac{x}{2} \log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x}}{2} \geq -k, \\
&\therefore (\log_2 x - \log_2 2)(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} - \log_{\sqrt{2}} 2) \geq -k, \\
&\therefore (\log_2 x - 1)(\log_2 x - 2) \geq -k, \\
&\text{令 } t = \log_2 x, t \in \left[\frac{1}{2}, 3\right], \\
&\text{则 } y = t^2 - 3t + 2, \\
&\therefore (-k) \leq y_{\min}, \\
&\therefore y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \text{ 时, } y \text{ 单调递减,} \\
&t \in \left[\frac{3}{2}, 3\right] \text{ 时, } y \text{ 单调递增,} \\
&\therefore t = \frac{3}{2} \text{ 时, } y \text{ 取得最小值 } -\frac{1}{4}, \\
&\therefore k \geq \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用函数奇偶性求函数解析式；不等式中的恒成立与能成立问题

11. 2018~2019学年10月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第16题14分 ★★★★★

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，对于任意实数 m, n ，都有 $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$ ，当 $x > 0$ 时， $0 < f(x) < 1$ 。

(1) 求 $f(0)$ 的值。

(2) 证明：当 $x < 0$ 时， $f(x) > 1$ 。

(3) 证明： $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减。

(4) 若 $f(k \cdot 3^x) \cdot f(3^x - 9^x - 2) > 1$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，求实数 k 的取值范围。

【答案】 (1) $f(0) = 1$ 。

(2) 证明见解析。

(3) 证明见解析.

(4) $k \in (-\infty, -1 + 2\sqrt{2})$.

【解析】(1) 令 $m = 0$, $n = 1$,

$$\therefore f(0+1) = f(1) \cdot f(0),$$

$$\because x > 0 \text{ 时}, 0 < f(x) < 1,$$

$$\therefore f(1) > 0,$$

$$\therefore f(0) = 1.$$

(2) 设 $x < 0$, $-x > 0$,

$$f(-x+x) = f(-x)f(x),$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{f(-x)},$$

$$\because 0 < f(-x) < 1,$$

$$\therefore \frac{1}{f(-x)} > 1,$$

$$\text{即 } f(x) > 1.$$

(3) 任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,

$$\text{且 } x_1 < x_2,$$

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = f[(x_1 - x_2) + x_2] - f(x_2)$$

$$= f(x_1 - x_2)f(x_2) - f(x_2)$$

$$= f(x_2)[f(x_1 - x_2) - 1]$$

$$\because x_1 - x_2 < 0,$$

$$\therefore f(x_1 - x_2) > 1,$$

$$\therefore f(x_1 - x_2) - 1 > 0,$$

$$\text{又 } \because f(x_2) > 0,$$

$$\therefore f(x_2)[f(x_1 - x_2) - 1] > 0,$$

$$\text{即 } f(x_1) - f(x_2) > 0,$$

$$\therefore f(x_1) > f(x_2),$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上单调递减}.$$

(4) $f(k \cdot 3^x) \cdot f(3^x - 9^x - 2) > 1$,

$$\therefore (3^x)^2 - (k+1) \cdot 3^x + 2 > 0,$$

$$\text{令 } f(t) = t^2 - (1+k)t + 2, \text{ 对称轴 } x = \frac{1+k}{2},$$

$$\text{当 } \frac{1+k}{2} < 0 \text{ 即 } k < -1 \text{ 时}, f(0) = 2 > 0, \text{ 符合},$$

$$\text{当 } \frac{1+k}{2} \geq 0, \text{ 对任何 } t > 0, f(t) > 0 \text{ 恒成立},$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1+k}{2} \geq 0 \\ \Delta = (1+k)^2 - 8 < 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } -1 \leq k < -1 + 2\sqrt{2},$$

$$\therefore k \in (-\infty, -1 + 2\sqrt{2}) .$$

【标注】【知识点】解析法；用赋值消元法求解析式；抽象函数；用定义法证明函数的单调性；利用函数单调性解不等式；不等式中的恒成立与能成立问题

12. 2020~2021学年天津滨海新区高一上学期期末第24题13分 ★★★

已知函数 $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a(x - 3a)$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

(1) 若 $a = 3$.

① 求函数 $g(x) = \log_a(x - 3a)$ 的定义域 .

② $x \in [-1, 0]$ 时 , 求函数 $y = f(2x) - mf(x+1) + 1$ 的最小值 $h(m)$.

(2) 若当 $x \in [a+2, a+3]$ 时 , 恒有 $|g(x) + g(x+2a)| \leq 1$, 试确定 a 的取值范围 .

【答案】 (1) ① $(9, +\infty)$.

$$\textcircled{2} \quad h(m) = \begin{cases} \frac{10}{9} - m & (m \leq \frac{2}{9}) \\ 1 - \frac{9}{4}m^2 & (\frac{2}{9} < m < \frac{2}{3}) \\ 2 - 3m & (m \geq \frac{2}{3}) \end{cases} .$$

$$(2) \quad a \in (0, \frac{4}{5}] .$$

【解析】 (1) ① 当 $a = 3$ 时 , $f(x) = 3^x$, $g(x) = \log_3(x - 9)$,

$\therefore x - 9 > 0$, 即 $x > 9$, 则函数的定义域为 $(9, +\infty)$.

② $y = f(2x) - mf(x+1) + 1$

$$= 3^{2x} - m \cdot 3^{x+1} + 1$$

$$= 3^{2x} - 3m \cdot 3^x + 1 \quad (x \in [-1, 0]) ,$$

$$\text{令 } 3^x = t , \text{ 则 } t \in [\frac{1}{3}, 1] ,$$

$$\therefore y = t^2 - 3mt + 1 , \quad t \in [\frac{1}{3}, 1] ,$$

① 当 $\frac{3}{2}m \leq \frac{1}{3}$ 时 , $m \leq \frac{2}{9}$,

$$y \text{ 在定义域内单调递增 } h(m) = \frac{10}{9} - m \left(t = \frac{1}{3} \right) ,$$

② 当 $\frac{3}{2}m \geq 1$ 时 , $m \geq \frac{2}{3}$, y 递减 , $h(m) = 2 - 3m \quad (t = 1)$,

③ 当 $\frac{3}{2}m \in (\frac{1}{3}, 1)$ 时 , $\frac{2}{9} < m < \frac{2}{3}$,

$$h(m) = 1 - \frac{9}{4}m^2 \left(t = \frac{3}{2}m \right) ,$$

$$\text{综上 } \textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} , \quad h(m) = \begin{cases} \frac{10}{9} - m & (m \leq \frac{2}{9}) \\ 1 - \frac{9}{4}m^2 & (\frac{2}{9} < m < \frac{2}{3}) \\ 2 - 3m & (m \geq \frac{2}{3}) \end{cases} .$$

$$(2) \lg(x) + g(x+2a) = |\log_a(x-3a)(x-a)| = |\log_a(x^2 - 4ax + 3a^2)| \leq 1,$$

当 $a > 1$ 时, 则有 $\frac{1}{a} \leq (x-3a)(x-a) \leq a$,

$\therefore$ 当 $x = a+2$ 时, $(x-3a)(x-a) = 4-4a < 0$,

$\therefore a > 1$ 不成立,

当 $a < 1$ 时, 有 $a \leq (x-3a)(x-a) \leq \frac{1}{a}$,

代入 $x = a+2$ 及 $x = a+3$,

解得 $a \leq \frac{4}{5}$.

综上, $a \in \left(0, \frac{4}{5}\right]$.

【标注】【知识点】求复合函数的值域; 求具体函数 (包括复合函数) 的定义域; 不等式中的恒成立与能成立问题

能成立问题

13. 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期末第17题 ★★

已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{2^x} - \frac{1}{4^x}$.

(1) 若 $a = 1$ 时, 求满足 $f(x) = -11$ 的实数 x 的值.

(2) 若存在 $x \in [0, 1]$, 使 $f(x) > 0$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $x = \log_{\frac{1}{2}}^3 = -\log_2^3$.

(2) $a > \frac{3}{4}$.

【解析】 (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = 1 - \frac{1}{2^x} - \frac{1}{4^x}$,

当 $f(x) = -11$ 时, $1 - \frac{1}{2^x} - \frac{1}{4^x} = -11 \Rightarrow 12 = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} \Rightarrow 12 = 2^{-x} + 4^{-x}$,

令 $t = 2^{-x}$, $\therefore t^2 - t - 12 = 0$,

$\therefore t = 3$ 或 -4 (舍去),

$\therefore \frac{1}{2^x} = 3$,

$\therefore x = \log_{\frac{1}{2}}^3 = -\log_2^3$.

(2) 由已知: 存在 $x \in [0, 1]$, 使 $f(x) > 0$ 成立为存在 $x \in [0, 1]$, 使 $a > \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x}$,

只需求出函数 $h(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x}$ 的最小值即可.

令 $\frac{1}{2^x} = t$, $\therefore t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 则 $y = t^2 + t$,

$\therefore y = t^2 + t$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单增,

$\therefore y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$,

$\therefore a > \frac{3}{4}$.

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题；解指数方程

一元二次不等式解集问题

14.

2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期单元测试《集合、不等式、均值不等式》第22题

★★★★

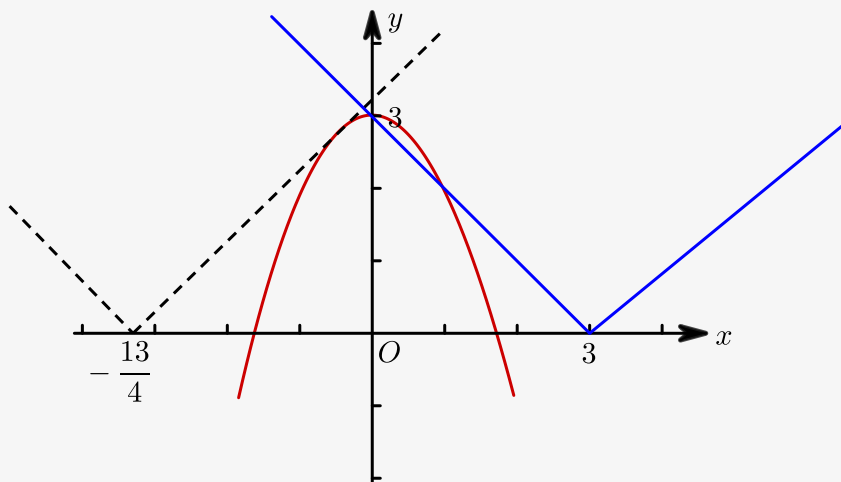
若关于 x 的不等式 $3 - |x - a| > x^2$ 至少有一个负数解，则实数 a 的取值范围是()

- A. $-3 < a < \frac{13}{4}$ B. $-\frac{13}{4} < a < \frac{13}{4}$ C. $-3 < a < 3$ D. $-\frac{13}{4} < a < 3$

【答案】D

【解析】关于 x 的不等式 $3 - |x - a| > x^2$ ，即 $|x - a| < 3 - x^2$ ，且 $3 - x^2 > 0$ 。

在同一个坐标系中画出 $y = 3 - x^2$ 和函数 $y = |x - a|$ 的图像，



当函数 $y = |x - a|$ 的图像的左支经过点 $(0, 3)$ 时，求得 $a = 3$ ；

当函数 $y = |x - a|$ 的图像的右支和

$$y = 3 - x^2 \text{ 的图像相切时，方程组 } \begin{cases} y = x - a \\ y = 3 - x^2 \end{cases}$$

有唯一解，

即 $x^2 + x - a - 3 = 0$ 有唯一解，故 $\Delta = 1 - 4(-a - 3) = 0$ ，求得 $a = -\frac{13}{4}$ ，

故要求的 a 的范围为 $(-\frac{13}{4}, 3)$ ，

故选：D。

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；函数零点的概念；含字母系数的不等式

15.

★★★

不等式 $x^2 - (a+1)|x| + a > 0$ 的解集为 $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 1, x \in \mathbf{R}\}$ ，则 a 的取值范围为 _____。

【答案】 $(-\infty, 0]$

【解析】 不等式 $x^2 - (a+1)|x| + a > 0$ 可化为 $(|x| - a)(|x| - 1) > 0$ ，

①当 $a \leq 0$ 时，由于 $|x| \neq 0$ ，化为 $|x| > 1$ ，其解集为 $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 1, x \in \mathbf{R}\}$ ，满足已知条件，

②当 $a > 0$ 时，其解集不是 $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 1, x \in \mathbf{R}\}$ ，故应舍去，

综上所述： a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$ ，

故答案为： $(-\infty, 0]$ 。

【标注】 【知识点】 解不等式中的分类讨论；含绝对值的不等式；一元二次不等式

16. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高二上学期期中第16题5分 ★★★

已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a, b \in \mathbf{R})$ 的值域为 $[0, +\infty)$ ，若关于 x 的不等式 $f(x) < c$ 的解集为 $(m, m+6)$ ，则实数 c 的值为 _____。

【答案】 9

【解析】 $\because f(x) = x^2 + ax + b$ 值域为 $[0, +\infty)$ ，

$\therefore$ 判别式 $\Delta = a^2 - 4b = 0$ ①，

$\therefore x^2 + ax + b - c < 0$ 解集为 $(m, m+6)$ ，

$\therefore 2m+6 = -a$ ， $m(m+6) = b-c$ ，

$a = -2(2m+6)$ ， $b = m(m+6) + c$ 代入①，得： $c = 9$ 。

【标注】 【知识点】 一元二次不等式；含字母系数的不等式；函数的值域；动轴定区间求值域

17. 2016年天津和平区高三一模文科第7题5分 ★★

若方程 $x^2 + (1-k)x - 2(k+1) = 0$ 的一个根在区间 $(2, 3)$ 内，则实数 k 的取值范围是 ()。

A. $(3, 4)$

B. $(2, 3)$

C. $(1, 3)$

D. $(1, 2)$

【答案】 D

【解析】 若方程 $x^2 + (1-k)x - 2(k+1) = 0$ 有两相等的实根，

则 $\Delta = (1-k)^2 + 8(k+1) = 0$ 解得 $k = -3$ ，此时 $x = -2$ ，不在区间 $(2, 3)$ 内。

令 $f(x) = x^2 + (1-k)x - 2(k+1)$,

若方程 $x^2 + (1-k)x - 2(k+1) = 0$ 有两不相等的实根, 且一个根在区间 $(2, 3)$ 内,

则 $f(2)f(3) < 0$, 即 $(4-4k)(10-5k) < 0$, 得 $1 < k < 2$.

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围

18.

2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期单元测试《集合、不等式、均值不等式》第24题

★★★

已知函数 $f(x) = |x-1| - mx$, 若关于 x 的不等式 $f(x) < 0$ 解集中的整数恰为 3 个, 则实数 m 的取值范围为 ().

A. $\frac{2}{3} < m \leq \frac{3}{4}$

B. $\frac{3}{4} < m \leq \frac{4}{5}$

C. $\frac{2}{3} < m < \frac{3}{4}$

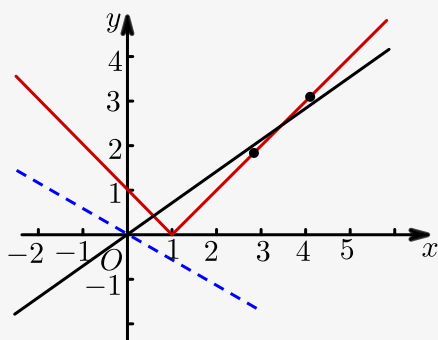
D. $\frac{3}{4} < m < \frac{4}{5}$

【答案】 A

【解析】 由 $f(x) < 0$ 得 $|x-1| - mx < 0$, 即 $|x-1| < mx$,

设 $g(x) = |x-1|$, $h(x) = mx$,

作出 $g(x)$ 的图象如图:



若 $|x-1| < mx$ 解集中的整数恰为 3 个,

则 $x = 1, 2, 3$ 是解集中的三个整数,

则满足 $\begin{cases} h(3) > g(3) \\ h(4) \leq g(4) \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 3m > 2 \\ 4m \leq 3 \end{cases}$,

则 $\begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m \leq \frac{3}{4} \end{cases}$, 即 $\frac{2}{3} < m \leq \frac{3}{4}$.

故选: A.

【标注】【知识点】函数相关的整数解问题