

05函数性质综合

定义域为R

1. 函数 $f(x) = \log_a \left(x^2 + ax + \frac{1}{4} \right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则 $g(x) = a^{2x^2-x}$ 的单调递增区间是 ().
- A. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ D. $(1, +\infty)$

值域为R

2. 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2ax + 3)$.
- (1) 若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 求实数 a 的取值范围.
- (2) 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上为增函数, 求实数 a 的取值范围.

最值问题

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(-x+9), & x \leq 1 \\ 2^x - 3m, & x > 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在最小值, 则实数 m 的取值范围是 ().
- A. $m \leq -\frac{1}{3}$ B. $m \geq -\frac{1}{3}$ C. $m > -\frac{1}{3}$ D. $m < -\frac{1}{3}$
4. 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-9, 9)$, 当 $x \in (-9, 0)$ 时, $f(x) = -\log_3(-x)$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 9)$ 上的解析式.
- (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 9)$ 上的值域.
- (3) 求 $h(x) = 2f^2(x) - mf(x) + 4$, $x \in [1, 3]$ 的最小值.
5. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + \log_2 x = \log_2(ax + 1)$.
- (1) 当 $a = 1$ 时, 解不等式 $f(x) > 1$.
- (2) 若关于 x 的方程 $f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}} x$ 的解集中有且只有一个元素, 求 a 的值.
- (3) 设 $a > 0$, 若对 $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 1, 求 a 的取值范围.
6. 设函数 $f(x) = x^2 - 2tx + 2$, 且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称.
- (1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上的最小值.
- (2) 关于 x 的不等式 $f(x) - kx + 1 \geq 0$ 在 $[1, 4]$ 上有解, 求实数 k 的取值范围.
- (3) 设 $g(x) = 2^{f(x)+4x-3}$, 若对于任意的 $x_1, x_2 \in [-2, 1]$ 都有 $|g(x_1) - g(x_2)| \leq M$, 求 M 的最小值.

判断函数的单调性、奇偶性求解不等式

7. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.
- (1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

(2) 若对任意的 $x \in [-1, 3]$, 不等式 $f(x^2 - ax) + f(4) \leq 0$ 均成立, 求实数 a 的取值范围.

8. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并给出证明.

(2) 判断函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性.

(3) 解不等式: $f(x^2 + x + 3) + f(-2x^2 + 4x - 7) > 0$.

💡 值域型问题

9. 已知函数 $g(x) = ax + 1$, $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2, & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ 对 $\forall x_1 \in [-2, 2]$, $\exists x_2 \in [-2, 2]$, 使 $g(x_1) = f(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

💡 恒成立问题

10. 已知函数 $f(x) = ma^x - a^{-x} (a > 1)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(1) 求常数 m 的值.

(2) 试判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并证明.

(3) 不等式 $f\left(\log_2 \frac{x}{2} \cdot \log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x}}{2}\right) + f(k) \geq 0$ 对 $x \in [\sqrt{2}, 8]$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 对于任意实数 m, n , 都有 $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$, 当 $x > 0$ 时, $0 < f(x) < 1$.

(1) 求 $f(0)$ 的值.

(2) 证明: 当 $x < 0$ 时, $f(x) > 1$.

(3) 证明: $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

(4) 若 $f(k \cdot 3^x) \cdot f(3^x - 9^x - 2) > 1$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

12. 已知函数 $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a(x - 3a)$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

(1) 若 $a = 3$.

① 求函数 $g(x) = \log_a(x - 3a)$ 的定义域.

② $x \in [-1, 0]$ 时, 求函数 $y = f(2x) - mf(x+1) + 1$ 的最小值 $h(m)$.

(2) 若当 $x \in [a+2, a+3]$ 时, 恒有 $|g(x) + g(x+2a)| \leq 1$, 试确定 a 的取值范围.

💡 能成立问题

13. 已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{2^x} - \frac{1}{4^x}$.

(1) 若 $a = 1$ 时, 求满足 $f(x) = -11$ 的实数 x 的值.

(2) 若存在 $x \in [0, 1]$, 使 $f(x) > 0$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

💡 一元二次不等式解集问题

14. 若关于 x 的不等式 $3 - |x - a| > x^2$ 至少有一个负数解, 则实数 a 的取值范围是()

A. $-3 < a < \frac{13}{4}$ B. $-\frac{13}{4} < a < \frac{13}{4}$ C. $-3 < a < 3$ D. $-\frac{13}{4} < a < 3$

15. 不等式 $x^2 - (a+1)|x| + a > 0$ 的解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 a 的取值范围为 _____ .

16. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a, b \in \mathbf{R})$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 若关于 x 的不等式 $f(x) < c$ 的解集为 $(m, m+6)$, 则实数 c 的值为 _____ .

17. 若方程 $x^2 + (1-k)x - 2(k+1) = 0$ 的一个根在区间 $(2, 3)$ 内, 则实数 k 的取值范围是 () .

A. $(3, 4)$ B. $(2, 3)$ C. $(1, 3)$ D. $(1, 2)$

18. 已知函数 $f(x) = |x-1| - mx$, 若关于 x 的不等式 $f(x) < 0$ 解集中的整数恰为 3 个, 则实数 m 的取值范围为 () .

A. $\frac{2}{3} < m \leq \frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4} < m \leq \frac{4}{5}$ C. $\frac{2}{3} < m < \frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{4} < m < \frac{4}{5}$