

04零点问题练习题

零点存在区间

1. 2020~2021学年12月天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高一上学期月考第6题5分 ★★

函数 $f(x) = -\frac{1}{x} + \log_2 x$ 的一个零点落在下列哪个区间 () .

- A. (0, 1) B. (1, 2) C. (2, 3) D. (3, 4)

【答案】 B

【解析】 由题知, 函数 $f(x) = -\frac{1}{x} + \log_2 x$,

$$\text{则 } f(1) = -\frac{1}{1} + \log_2 1 = -1,$$

$$f(2) = -\frac{1}{2} + \log_2 2 = \frac{1}{2},$$

$$f(1) \cdot f(2) < 0,$$

则函数 $f(x)$ 的零点落在区间 (1, 2) 上 .

故选 B .

【标注】 【知识点】判定函数零点所在区间 (存在性定理) ; 函数零点存在定理

2. 2020~2021学年天津滨海新区高一上学期期末第3题5分 ★★

设函数 $f(x) = 2^x + x - 5$, 则函数 $f(x)$ 的零点所在区间是 () .

- A. (-1, 0) B. (0, 1) C. (1, 2) D. (2, 3)

【答案】 C

【解析】 $\because y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增, $y = x - 5$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增,

$\therefore f(x) = 2^x + x - 5$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增,

$$f(1) = 2^1 + 1 - 5 = -2 < 0,$$

$$f(2) = 2^2 + 2 - 5 = 1 > 0,$$

$$\therefore f(1)f(2) < 0,$$

$\therefore$ 零点 $x_0 \in (1, 2)$.

故选 C .

【标注】 【知识点】判定函数零点所在区间 (存在性定理)

3. 2017~2018学年天津河北区天津市第二中学高一上学期期中第6题4分 ★★

函数 $f(x) = 3^x + \frac{1}{2}x - 2$ 的零点所在的一个区间是 () .

A. $(-2, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, 2)$ **【答案】** C**【解析】** $f(-2) = 3^{-2} + \frac{1}{2} \times (-2) - 2 = -\frac{28}{9} < 0$,

$$f(-1) = 3^{-1} + \frac{1}{2} \times (-1) - 2 = -\frac{13}{6} < 0,$$

$$f(0) = 3^0 + \frac{1}{2} \times 0 - 2 = -1 < 0,$$

$$f(1) = 3^1 + \frac{1}{2} \times 1 - 2 = \frac{3}{2} > 0,$$

$$f(2) = 3^2 + \frac{1}{2} \times 2 - 2 = 8 > 0 \text{ 所以函数零点在区间 } (0, 1) \text{ 内}.$$

【标注】【知识点】函数零点存在定理；判定函数零点所在区间（存在性定理）

4. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第7题4分 ★★

已知函数 $f(x) = 2^x + 2x - 5$ 的零点属于区间 $(m-1, m)$ ，其中 $m \in \mathbf{Z}$ ，则

$$4^{\frac{1}{m}} - \log_8 |m| = (\quad) .$$

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{5}{3}$

D. 4

【答案】 C**【解析】** $\because y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增， $y = 2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增， $\therefore f(x) = 2^x + 2x - 5$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增，

$$f(1) = 2^1 + 2 - 5 = -1 < 0,$$

$$f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 5 = 3 > 0,$$

$$\therefore f(1) \cdot f(2) < 0,$$

$$\therefore \text{零点 } x_0 \in (1, 2),$$

$$\therefore m = 2,$$

$$4^{\frac{1}{m}} - \log_8 |m|$$

$$= 4^{\frac{1}{2}} - \log_8 2$$

$$= 2 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{3}.$$

故选 C.

【标注】【知识点】判定函数零点所在区间（存在性定理）；指对化简求值 根据解的个数求解参数值

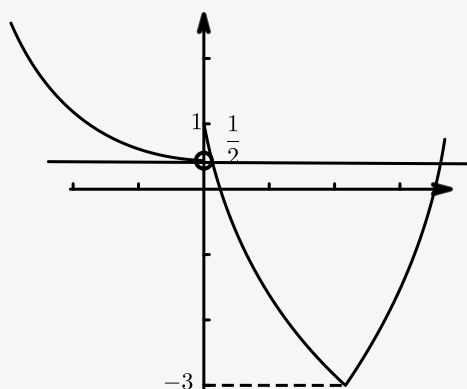
5. 2020~2021学年12月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第11题5分 ★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 1, & x \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}, & x < 0 \end{cases}$, 若 $g(x) = f(x) - a$ 恰好有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$

【解析】 $\because f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 1, & x \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}, & x < 0 \end{cases}$,

画图可知 $\frac{1}{2} < a \leq 1$.



故答案为: $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；已知零点情况求参数的取值范围

6. 2020~2021学年天津和平区高一上学期期末第9题4分 ★★

已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 函数 $g(x) = f(x) + x + m$, 若 $g(x)$ 有两个零点, 则 m 的取值范围是 () .

A. $[-1, +\infty)$

B. $(-\infty, -1]$

C. $[0, +\infty)$

D. $[-1, 0)$

【答案】 A

【解析】 $f(x)$ 的图象如下图, 若 $g(x)$ 存在两个零点,

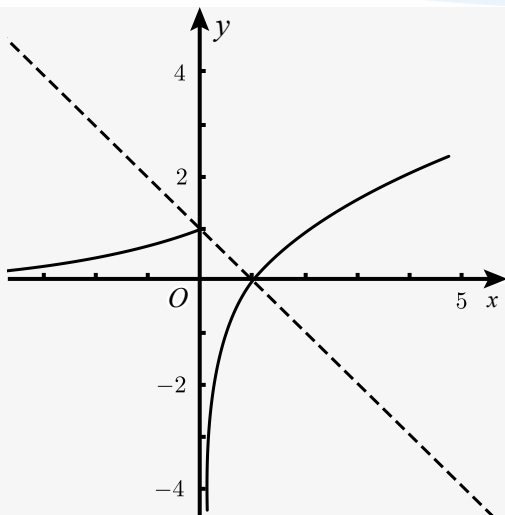
令 $g(x) = 0$, 即 $f(x) = -x - m$ 有两个不等实根,

即函数 $y = f(x)$ 的图象和直线 $y = -x - m$ 有两个交点,

作出直线 $y = -x - m$,

当 $-m \leq 1$, 即 $m \geq -1$ 时, $y = f(x)$ 和 $y = -x - m$ 的图象有两个交点.

故选 A .



【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围

7. 2018~2019学年天津高一上学期期末新四区联考 ★★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x < 2 \\ \frac{3}{x-1}, & x \geq 2 \end{cases}$ ，若方程 $f(x) - a = 0$ 有三个不同的实数根，则实数 a 的取值范围是 () .

A. (1,3)

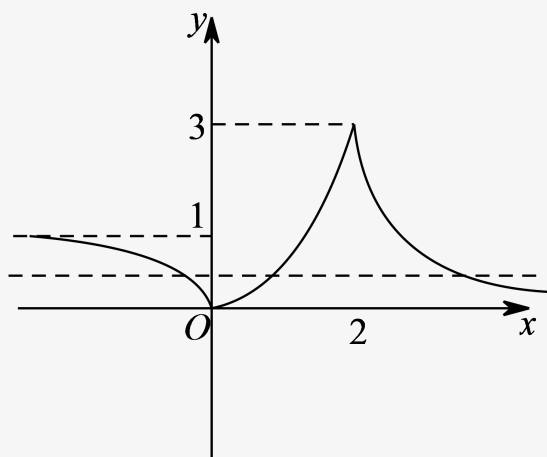
B. (0,3)

C. (0,2)

D. (0,1)

【答案】D

【解析】由题意可知：函数 $f(x)$ 的图象如下：



由关于 x 的方程 $f(x) - a = 0$ 有三个不同的实数解，
可知函数 $y = a$ 与函数 $y = f(x)$ 有三个不同的交点，
由图象易知：实数 a 的取值范围为 $(0,1)$.

故选 D .

【标注】【知识点】函数零点的概念

 求零点的和积范围

8. 2018~2019学年天津静海县静海县第一中学高一上学期期中第14题5分 ★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+1}, & 0 \leq x < 1 \\ |x-3|-1, & x \geq 1 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{e}$ ($e = 2.71828\cdots$, 是自然对数的底数) 的所有零点之和为 _____.

【答案】 $6 + \frac{1}{2e-1}$

【解析】 当 $0 \leq x < 1$ 时, 由 $g(x) = f(x) - \frac{1}{e} = 0$,
得 $f(x) = \frac{1}{e}$,
 $\therefore \frac{2x}{x+1} = \frac{1}{e}$,
解得: $x = \frac{1}{2e-1}$;
当 $x \geq 1$ 时, 由 $g(x) = f(x) - \frac{1}{e} = 0$, 得 $f(x) = \frac{1}{e}$,
 $\therefore |x-3|-1 = \frac{1}{e}$,
解得: $x = 4 + \frac{1}{e}$ 或 $x = 2 - \frac{1}{e}$,
综上所述: 函数 $g(x)$ 的所有零点之和为 $6 + \frac{1}{2e-1}$.
故答案为: $6 + \frac{1}{2e-1}$.

【标注】 【知识点】零点、交点、根的等价转化; 函数零点的概念

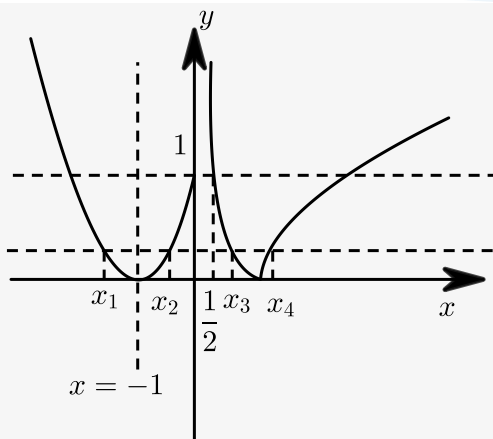
9. 2018~2019学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第10题 ★★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0 \\ |\log_2 x|, & x > 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = a$ 有四个不同的解 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $x_3 \cdot (x_1 + x_2) + \frac{1}{x_3^2 \cdot x_4}$ 的取值范围是 ().

- A. $(-1, 1]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-1, 1)$ D. $(-1, 1)$

【答案】 A

【解析】 对于方程解 (或函数零点的) 问题, 可利用函数的值域或最值, 结合函数的单调性、草图确定其中参数范围. 从图象的最高点、最低点, 分析函数的最值、极值从图象的对称性, 分析函数的奇偶性, 从图象的走向趋势, 分析函数的单调性、周期性等.
先作 $f(x)$ 图象,



由图象可得 $x_1 + x_2 = -2$, $x_3 x_4 = 1$, $x_3 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$,

因为 $x_3 \cdot (x_1 + x_2) + \frac{1}{x_3^2 \cdot x_4} = -2x_3 + \frac{1}{x_3}$ 为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ 单调递减函数,

从而 $x_3 \cdot (x_1 + x_2) + \frac{1}{x_3^2 \cdot x_4} \in (-1, 1]$.

故选 A.

【标注】【知识点】分段函数；二次函数的图象及性质；对数函数的图象及性质；函数零点的概念；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

零点解答

10. 2018~2019学年12月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第18题8分 ★★★

已知函数 $f(x) = \log_2(1+x) + \log_2(1-x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域.

(2) 若函数 $g(x) = x - 2^{f(x)} - 2t$ 有两个不同的零点, 求实数 t 的取值范围.

【答案】 (1) $-1 < x < 1$.

(2) $t \in \left(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right)$.

【解析】 (1) 由 $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$ 得 $-1 < x < 1$.

(2) $f(x) = \log_2(1+x) + \log_2(1-x) = \log_2(1-x^2)$,

$\therefore g(x) = x^2 + x - 1 - 2t$, 它的图象对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$,

依题意 $\begin{cases} g(-1) = 1 - 1 - 2t > 0 \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} - 2t < 0 \\ g(1) = 1 - 1 - 2t > 0 \end{cases}$ 得 $-\frac{5}{8} < t < -\frac{1}{2}$,

$\therefore t \in \left(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right)$.

【标注】【知识点】求具体函数（包括复合函数）的定义域；二次函数的图象及性质；函数零点存在定理；判定函数零点所在区间（存在性定理）

