

04零点问题

1. 函数零点的判定

1. 零点存在性定理

一般地，如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有

那么函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点

即存在 $c \in (a, b)$ ，使得 $f(c) = 0$ ，这个 c 也就是方程 $f(x) = 0$ 的根。

2. 数形结合研究函数零点

【耐心阅读以下一段话】

函数 $f(x) = h(x) - g(x)$ 的零点就是函数 $h(x)$ 与 $g(x)$ 图象 **交点的横坐标**，所以与函数零点相关的问题，可以先画出函数图象，根据函数的图象并结合函数的零点存在性定理，列出相关的相等关系或不等关系，进而解决零点所在的区间及参数的范围等问题。

【恭喜你完成自学成就！智商 + 1 + 1 + 1...】

3. 二分法

对于在区间 $[a, b]$ 上连续不断且满足 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 的函数 $y = f(x)$ ，通过不断把 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做 **二分法**。

【步骤】

(1) 确定区间 $[a, b]$ ，验证 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，给定精确度 ε ；

(2) 求区间 $[a, b]$ 的中点 c ；

(3) 计算 $f(c)$ ；

①若 $f(c) = 0$ ，则 c 就是函数的零点。

②若 $f(a) \cdot f(c) < 0$ ，则令 $b = c$ （此时零点 $x_0 \in (a, c)$ ）；

③若 $f(c) \cdot f(b) < 0$ ，则令 $a = c$ （此时零点 $x_0 \in (c, b)$ ）。

(4) 判断是否达到精确度 ε ：即若 $|a - b| < \varepsilon$ ，则得到零点近似值 a （或 b ），否则重复步骤（2）

(3) (4)。

2. 零点具体题型

📍 零点存在区间

1. 使函数 $f(x) = 2^x - x^2$ 有零点的区间是（ ）。

A. $(-3, -2)$

B. $(-2, -1)$

C. $(-1, 0)$

D. $(0, 1)$

2. 设函数 $y = x^3$ 与 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 的图象交点为 (x_0, y_0) , 则 x_0 所在的区间是 ().
- A. (0, 1) B. (1, 2) C. (2, 3) D. (3, 4)
3. 已知函数 $f(x) = 3^x + x - 5$ 的零点 $x_0 \in [a, b]$, 且 $b - a = 1$, $a, b \in \mathbf{N}^*$, 则 $a + b =$ _____.
4. 函数 $f(x) = \log_2 x - \frac{3}{x}$ 的零点所在区间为 ().
- A. (1, 2) B. (2, 3) C. (3, 4) D. (4, 5)
5. 函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2}{x}$ 的零点所在的大致区间是 ().
- A. (0, 1) B. (1, 2) C. (2, 3) D. (3, 4)
6. 在下列区间中, 方程 $e^x + 4x - 3 = 0$ 的解所在的区间为 ().
- A. $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ B. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$
7. 函数 $f(x) = x - \lg \frac{1}{x} - 2$ 的零点所在区间为 ().
- A. (0, 1) B. (3, $+\infty$) C. (2, 3) D. (1, 2)
8. 函数 $f(x) = \ln(-x) - \frac{1}{3}x - 2$ 的零点所在区间为 ().
- A. (-4, -3) B. (-3, -e) C. (-e, -2) D. (-2, -1)
9. 函数 $f(x) = |x - 2| - \ln x$ 在定义域内零点可能落在下列哪个区间内 ().
- A. (0, 1) B. (2, 3) C. (3, 4) D. (4, 5)
10. 函数 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} - e^{\ln 4}$ 在区间 $(k, k+1) (k \in \mathbf{N})$ 内有零点, 则 $k =$ ().
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
11. 设方程 $x^3 = 2^{2-x}$ 的解为 x_0 , 则 x_0 所在的区间是 ().
- A. (0, 1) B. (1, 2) C. (2, 3) D. (3, 4)

根据解的个数求解参数值

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq 0 \\ -2 + \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 方程 $f(x) = k$ 有两个实数解, 则 k 的范围是 _____.
13. 已知函数 $f(x) = |3^x - 2| - m$ 有两个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是 ().
- A. [0, 2] B. (0, 2) C. [0, 2) D. (0, 2]
14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 1, & x < -1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, & x \geq -1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = m$ 恰有三个不同的实数解, 则实数 m 的取值范围是 ().
- A. (0, 3) B. [2, 3) C. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

15.

已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = f(x) + x + a$, 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则实数 a 取值范围是 ____ .

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1|, & x \leq 2 \\ f(x - 2), & x > 2 \end{cases}$, 则函数 $y = f(x) - \lg x$ 的零点的个数是 () .

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

17. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = f(x-1)$, 且当 $x \in [-1, 1]$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} \log_{0.5}(1-x), & -1 \leq x \leq 0 \\ -|x|, & 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ 若在区间 } [0, 5] \text{ 上函数 } g(x) = f(x) - mx \text{ 恰有 4 个不同的零点, 则}$$

实数 m 的取值范围为 () .

A. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

B. $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$

D. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right)$

18. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m \end{cases}$ 其中 $m > 0$, 若存在实数 b , 使得关于 x 的方程 $f(x) = b$ 有三个不同的根, 则 m 的取值范围是 ____ .

零点个数

19. 方程 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = |\ln x|$ 的解的个数为 () .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

20. 函数 $f(x) = \begin{cases} |x+2| - 1, & x \leq 0 \\ \ln x - x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$ 的零点的个数是 ____ .

求零点的和积范围

21. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2, & x \leq 0 \\ |\log_{\frac{1}{2}} x|, & x > 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = a$ 有四个不同的解 x_1, x_2, x_3, x_4 ,

且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则实数 a 的最小值是 ____ ; $\frac{4}{x_3 \cdot x_4^2} - x_4 \cdot (x_1 + x_2)$ 的最小值是 ____ .

22. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x \leq 2 \\ -x + 7, & x > 2 \end{cases}$, 若互不相等的实数 a, b, c 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则

$2^a + 2^b + 2^c$ 的取值范围是 () .

A. (8, 9)

B. (65, 129)

C. (64, 128)

D. (66, 130)

零点问题解答

23. 已知函数 $f(x) = \ln(x+a)$ ($a \in \mathbf{R}$) 的图象过点 $(1, 0)$, $g(x) = x^2 - 2e^{f(x)}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 若函数 $y = f(x) + \ln(2x-k)$ 在区间 $(1, 2)$ 上有零点, 求整数 k 的值.

(3) 设 $m > 0$, 若对于任意 $x \in \left[\frac{1}{m}, m\right]$, 都有 $g(x) < -\ln(m-1)$, 求 m 的取值范围.

24. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \log_2[(a-3)x + 3a-4]$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 解不等式 $f(3x) < 0$.

(2) 若函数 $y = f(x^2 - 4x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 求实数 a 的取值范围 .

(3) 设 $g(x) = f(x) - \log_2 \left(\frac{1}{x} + 2a \right)$, 若函数 $y = g(x)$ 有且只有一个零点 , 求实数 a 的取值范围 .