

02辅助角公式

1. 辅助角公式

1. 辅助角公式的目的

对于形如 $y = a \sin x + b \cos x$ (a, b 是不同时为零的实数) 这样的表达式, 如何去研究它的值域、周期以及单调区间呢?

2. 辅助角公式的推导

①考察以 (a, b) 为坐标的点 $P(a, b)$, 设以 OP 为终边的一个角是 φ , 则由三角函数的定义, 有:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

②于是:

$$y = a \sin x + b \cos x = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$\underline{\hspace{2cm}}$$
$$\underline{\hspace{2cm}}$$

③其中 φ 角所在象限由 a, b 的符号确定, φ 角的值由 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 共同确定, 即 φ 角的值由 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ 确定.

辅助角公式化简函数

1. 若 $3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha = A \sin(\alpha + \varphi)$, 则 A, φ 的值分别为 ().

A. $2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}$

B. $-2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}$

C. $2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}$

D. $2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}$

2. 计算: $\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 特别说明

辅助角公式在天津的考题中出现应用的形式比较单一, 我们将在后面的习题中强化练习如何利用辅助角公式对三角函数进行化简, 并根据化简后的结果巩固练习前面所学的单调性、奇偶性、对称性、值域、最值的相关题型。

2. 三角恒等变换公式化简函数后在性质中的具体应用

求解在实数域上的单调性

【1:1型】

3. 已知函数 $f(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

4. $f(x) = \sqrt{2} \sin x \cos x - \sqrt{2} \sin^2 x$. 化简 $f(x)$

化简 $f(x)$

【1: $\sqrt{3}$ 型】

5. 已知函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3}$, $x \in \mathbf{R}$.

求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间.

6. 已知函数 $f(x) = \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间.



求解确定区间上的单调性

7. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2}$ ($x \in \mathbf{R}$).

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的单调性.

8. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2\cos^2 x + m$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的最大值为 1.

(1) 求常数 m 的值.

(2) 当 $x \in [0, \pi]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

9. 已知函数 $f(x) = 4 \sin x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调性.

【余弦型】

10. 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 1$.

(1) 化简 $f(x)$

(2) $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调区间.



求解确定区间上的最值

【1: $\sqrt{3}$ 型】

11. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最值及取得最值时 x 的值.

【1:1型】

12. 已知函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(x - \frac{\pi}{2}) + m$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$, 则实数 m 的值为 ().
- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 2

🔗 包罗万象 举一反三

13. 设函数 $f(x) = \cos(2x + \frac{2\pi}{3}) + 2\cos^2 x, x \in \mathbf{R}$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调减区间.
- (2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值.
14. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 - 2\sin^2 x, x \in \mathbf{R}$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间;
- (2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象上各点的纵坐标保持不变, 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 把所得到的图象再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求 $y = g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{8}]$ 上的最小值.

🔗 求对称轴和对称中心

15. 已知函数 $f(x) = \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in \mathbf{R}$.
- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.
- (2) 求 $f(x)$ 图象的对称轴方程和对称中心的坐标.
16. 已知 $f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 求函数 $f(x)$ 的对称轴方程.
17. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x - \sin^2(x - \frac{\pi}{3})$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及对称轴方程.
- (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 的值域.

🔗 求解组合角

18. 已知 $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos(\pi + \frac{x}{2})$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间和对称轴方程.
- (2) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $f(x) = -\frac{1}{10}$, 求 $\sin(2x + \frac{\pi}{3})$.
19. 已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x$.
- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.
- (2) 当 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$, 且 $f(x_0) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$, 求 $f(x_0 + \frac{\pi}{6})$ 的值.

20.

已知函数 $f(x) = 4 \cos x \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ ($x \in \mathbf{R}$) , 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象 .

(1) 求函数 $y = g(x)$ 的解析式 .

(2) 若 $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = \sqrt{3}$, 求 $g(x_0)$.

21. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2\cos^2 x$ ($x \in \mathbf{R}$) .

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间 .

(2) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到 $g(x)$ 的图象, 已知 $g(x_0) = \frac{11}{5}$ ($x_0 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$) , 求 $\cos(2x_0)$ 的值 .