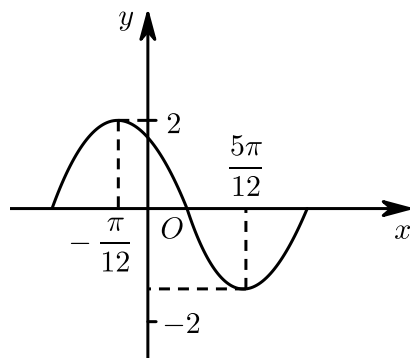


第二讲-三角函数综合（一）练习题

1. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 在一个周期内的图象如下，此函数的解析式为（ ）.



A. $y = 2 \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$
 C. $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)$

B. $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
 D. $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

【答案】 A

【解析】 由图象可知：

$$\frac{T}{2} = \frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore T = \pi = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$$\omega = 2.$$

$$f(x)_{\max} = 2, \text{ 即 } A = 2.$$

$\therefore$ 图象过点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 2\right)$, 代入得：

$$-\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

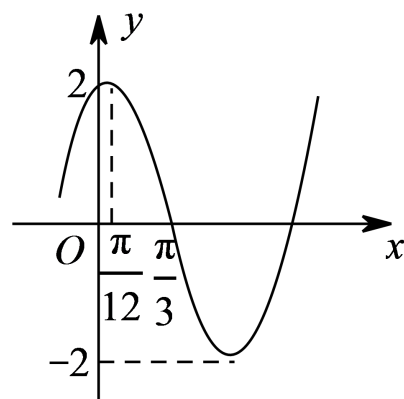
$$\therefore \varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{当 } k = 0 \text{ 时, } \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\therefore y = 2 \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right).$$

【标注】 【知识点】 已知正弦型函数图象求参数值

2. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如右图所示，则 $\varphi =$ ().



A. $-\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $-\frac{\pi}{3}$

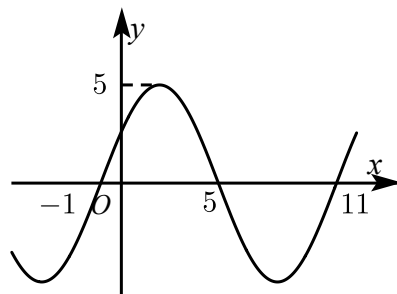
D. $\frac{\pi}{3}$

【答案】 D

【解析】 由题意得 $T = 4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 2$,
 又 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \cdot 2 + \varphi = \pi + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$
 故选 D.

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质

3. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在 R 上的部分图像如图所示, 则 $f(2014)$ 的值为 _____.



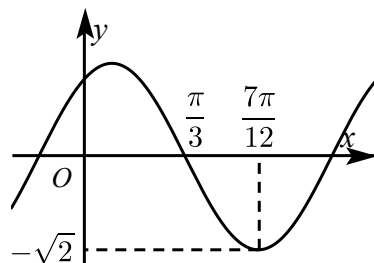
【答案】 $-\frac{5}{2}$

【解析】 由图可知: $A = 5$, $T = 11 - (-1) = 12$, $f(-1) = 0$,
 $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6}$,
 $f(-1) = 5 \sin\left[\frac{\pi}{6} \times (-1) + \varphi\right] = 0$,
 解得: $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,
 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}\therefore \varphi &= \frac{\pi}{6}, \\ \therefore f(x) &= 5 \sin \left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{6} \right), \\ \therefore f(2014) &= 5 \sin \left(\frac{\pi}{6} \times 2014 + \frac{\pi}{6} \right) = 5 \sin \frac{2015}{6} \pi = 5 \sin \frac{11}{6} \pi = -\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值；正弦函数的图象和性质

4. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, (A, ω, φ 为常数, $A > 0, \omega > 0$) 的部分函数图象如图所示, 则 $A \tan \varphi$ 的值为 _____.

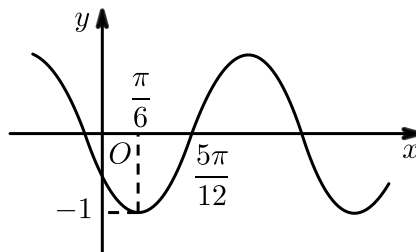


【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】 由图象可知, $A = \sqrt{2}$,
 $\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$,
 $\therefore T = \pi$,
 再由 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ 得 $\omega = 2$,
 由五点作图可知, $\omega \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi$,
 即 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi$, 解得: $\varphi = \frac{\pi}{3}$,
 $\therefore A \tan \varphi = \sqrt{2} \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值；正弦函数的图象和性质

5. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\pi < \varphi < 0$) 的部分图像如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递增区间是 ().



A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6} \right] (k \in \mathbb{Z})$
 C. $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3} \right] (k \in \mathbb{Z})$

B. $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} \right] (k \in \mathbb{Z})$
 D. $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi \right] (k \in \mathbb{Z})$

【答案】C

【解析】由图可知， $f(x)$ 周期为 π ，故 $\omega = 2$ ，

将点 $(\frac{\pi}{6}, -1)$ 代入 $f(x)$ 得 $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$ ，

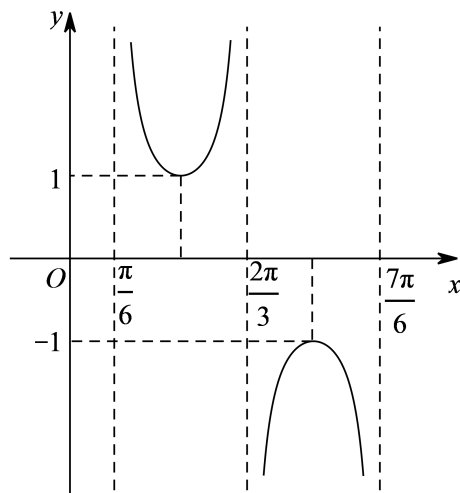
$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $2x - \frac{5\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] k \in \mathbf{Z}$ ，

$\therefore x \in [\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi], k \in \mathbf{Z}$ 。

故选C。

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质；已知正弦型函数图象求参数值

6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\sin(\omega x + \varphi)}$ (其中 $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)的部分图象如图所示，则 $\omega = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\varphi = \underline{\hspace{1cm}}$ 。



【答案】 $2; -\frac{\pi}{3}$

【解析】由图象可知 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi \Rightarrow \omega = 2$ ，

$\therefore f(x) = \frac{1}{\sin(2x + \varphi)}$ ，

令 $f(\frac{5\pi}{12}) = 1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$ 。

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值；正弦函数的图象和性质

7. 已知函数 $y = \sin(\pi x + \varphi) - 2\cos(\pi x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$)的图象关于直线 $x = 1$ 对称，则 $\sin 2\varphi =$ ()。

A. $-\frac{4}{5}$

B. $-\frac{3}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

【答案】 A

【解析】 $y = \sin(\pi x + \varphi) - 2\cos(\pi x + \varphi) = \sqrt{5}\sin(\pi x + \varphi - \alpha)$,

$$\text{其中} \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$\therefore$ 函数的图象关于直线 $x = 1$ 对称,

$$\therefore \pi + \varphi - \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\text{即} \varphi = \alpha - \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\text{则} \sin 2\varphi = \sin 2\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \sin(2\alpha - \pi + 2k\pi)$$

$$= \sin(2\alpha - \pi) = -\sin 2\alpha = -2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$= -2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{5},$$

故选 A.

【标注】 【知识点】 辅助角公式；倍角、和差角公式综合；正弦函数的图象和性质

8. 已知 $\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$, 直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 和 $x = \frac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的两条相邻的对称轴, 则 $\varphi =$ ().

A. $\frac{3\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{4}$

【答案】 D

【解析】 $\therefore$ 直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 和 $x = \frac{5\pi}{4}$ 是两条相邻对称轴,

$$\therefore \frac{T}{2} = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi,$$

$$\therefore T = 2\pi, \text{即周期为 } 2\pi.$$

$$\text{又} \therefore \omega = \frac{2\pi}{T}, \text{则} \omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1,$$

$$\therefore \text{函数} f(x) = \sin(x + \varphi),$$

由 $x = \frac{\pi}{4}$ 是对称轴可知,

$$\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{又} \therefore 0 < \varphi < \pi,$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

故选 D.

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质；正弦型函数的图象与性质

9.

将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若对满足 $|f(x_1) - g(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$, 则 $\varphi =$ ().

A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

【答案】 D

【解析】 由题意可得, $g(x)$ 由 $f(x)$ 平移得到, 两函数周期为 π , 最小值为 -1 , 最大值为 1 , 若需满足 $|f(x_1) - g(x_2)| = 2$, 则 $\begin{cases} f(x_1) = 1 \\ g(x_2) = -1 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} f(x_1) = -1 \\ g(x_2) = 1 \end{cases}$,
若 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$, 可以得到 $f(x_1)$ 和 $g(x_2)$ 两函数峰值间距为 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$,
 $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$.
故选: D.

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质

10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调, 且 $f(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{\pi}{2}) = -f(0)$, 则 $\varphi =$ ().
- A. $-\frac{\pi}{3}$ B. $-\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$

【答案】 A

【解析】 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$;
若 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调, $\frac{\pi}{3} - 0 \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, 解得 $0 < \omega \leq 3$,
又 $f(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{\pi}{2}) = -f(0)$,
 $\therefore x = \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{5\pi}{12}$ 为 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的一条对称轴,
且 $(\frac{\frac{\pi}{3} + 0}{2}, 0)$ 即 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 为 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的一个对称中心,
 $\therefore \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$, 解得 $\omega = 2 \in (0, 3]$,
 $\therefore f(x) = \sin(2x + \varphi)$,
 $\therefore f(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{\pi}{2}) = -f(0)$,
 $\therefore \sin(\frac{2\pi}{3} + \varphi) = \sin(\pi + \varphi) = -\sin \varphi$,
 $\therefore \varphi = -\frac{\pi}{3}$.
故选 A.

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质; 正弦型函数的图象与性质

11. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象与 y 轴的交点为 $(0, 1)$, 它在 y 轴右侧的第一个最高点和第一个最低点的坐标分别为 $(x_0, 2)$ 和 $(x_0 + 2\pi, -2)$, 则 $\varphi = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}$

【解析】 由题意可得: $A = 2, \frac{T}{2} = 2\pi, T = 4\pi,$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x + \varphi\right),$$

$$\therefore f(0) = 2 \sin \varphi = 1,$$

$$\text{由 } |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\therefore f(x) \text{ 过点 } (x_0, 2), 2 = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\frac{1}{2}x_0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\frac{1}{2}x_0 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x_0 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$\therefore (x_0, 2)$ 在 y 轴右侧的第一个最高点,

$$\therefore x_0 = \frac{2\pi}{3}.$$

故答案为: $\varphi = \frac{\pi}{6}, x_0 = \frac{2\pi}{3}.$

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

12. 已知函数 $f(x) = \sin x + a \cos x$ 的图像关于 $x = \frac{5\pi}{3}$ 对称, 则函数 $g(x) = a \sin x + \cos x$ 的图像的一条对称轴是 ().

A. $x = \frac{\pi}{4}$

B. $x = \frac{\pi}{3}$

C. $x = \frac{11\pi}{6}$

D. $x = \frac{2\pi}{3}$

【答案】 C

【解析】 由题意知

$$f(0) = f\left(\frac{10\pi}{3}\right),$$

$$\therefore a = \sin \frac{10}{3}\pi + a \cos \frac{10\pi}{3},$$

$$\therefore a = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}a.$$

$$\text{得: } a = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore g(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x + \cos x$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right).$$

$$\text{对称轴 } x + \frac{2\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{当 } k = 2 \text{ 时, } x = \frac{11}{6}\pi.$$

故选C.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

13. 若函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x$, $\omega > 0$, $x \in \mathbf{R}$, 又 $f(x_1) = 2$, $f(x_2) = 0$, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 3π , 则 ω 的值为 ().

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. 2

【答案】 A

【解析】 解: 函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x = 2 \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$,

$$\therefore f(x_1) = 2, f(x_2) = 0, \text{ 且 } |x_1 - x_2| \text{ 的最小值为 } 3\pi,$$

$$\text{可知, } \frac{T}{4} = 3\pi, \text{ 可得: } T = 12\pi,$$

$$\text{由 } T = \frac{2\pi}{\omega},$$

$$\therefore \omega = \frac{1}{6}.$$

故选: A.

【标注】【知识点】辅助角公式; 倍角、和差角公式综合; 正弦型函数的图象与性质; 正弦函数的图象和性质

14. 已知函数 $f(x) = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$), $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = 2$ 的两个相邻交点的距离等于 π , 则 $f(x)$ 的单调递增区间是 ().

A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$

B. $\left[k\pi + \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{11\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$

C. $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$

D. $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right], k \in \mathbf{Z}$

【答案】C

【解析】 $\because f(x)$ 与直线 $y=2$ 的两个相邻交点的距离为 $\pi \therefore T=\pi$,

$\therefore T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi, \therefore \omega = 2, \therefore f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \therefore$ 单调递增区间为:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

故选C.

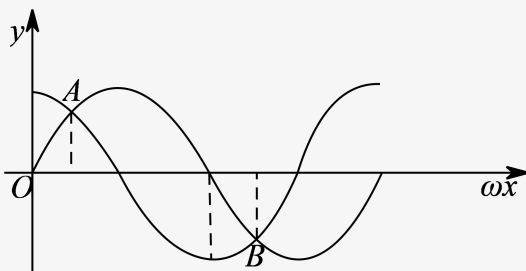
【标注】【素养】数学运算

【知识点】已知正弦型函数性质求解析式；求正弦型函数的单调区间

15. $\omega > 0$, 在函数 $y = 2\sin \omega x$ 与 $y = 2\cos \omega x$ 的图像的交点中, 距离最短的两个交点的距离为 $2\sqrt{3}$, 则 ω 的值为 _____.

【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【解析】如图, 两图象最近交点, 即为 AB 之间的距离,



A点为 $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, B点为 $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$,

$$\therefore \omega x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\pi}{4},$$

$$\omega x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{5\pi}{4}.$$

$$\therefore 2\sqrt{3} = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\omega} \cdot \frac{5\pi}{4}\right)^2 + \left[\sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})\right]^2} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2}.$$

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值；正弦函数的图象和性质

16. 设函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$). 若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 _____.

【答案】 π

【解析】由于 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 上具有单调性，

$$\text{则 } \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{1}{2}T \Rightarrow T \geq \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{由 } f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3}), \text{ 可知函数 } f(x) \text{ 的一条对称轴为 } x = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{7\pi}{12},$$

则 $x = \frac{\pi}{2}$ 离最近对称轴距离为

$$\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}.$$

又 $f(\frac{\pi}{2}) = -f(\frac{\pi}{6})$ ，则 $f(x)$ 有对称中心 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ ，

$$\text{从而 } \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{T}{4} \Rightarrow T = \pi.$$

故答案为： π 。

【标注】【知识点】求正弦型函数的周期；已知正弦型函数性质求解解析式

17. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3} + x)\sin(\frac{\pi}{3} - x) - 2\cos^2(x + \frac{\pi}{4})$ ， $x \in \mathbf{R}$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期。

(2) 求 $f(x)$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值。

【答案】(1) π 。

(2) $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 内最大值为 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，最小值为 $-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

【解析】(1) $\because$ 函数

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sqrt{3}\left(\sin \frac{\pi}{3} \cos x + \sin x \cos \frac{\pi}{3}\right)\left(\sin \frac{\pi}{3} \cos x - \sin x \cos \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x\right) + \sin 2x - 1 \\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{4} \cos^2 x - \frac{1}{4} \sin^2 x\right) + \sin 2x - 1 \\ &= \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ &= 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1. \\ \therefore \omega &= 2, \text{ 周期 } T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi. \end{aligned}$$

(2) 当 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时，

$$-\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in [-\sqrt{3}, 2].$$

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{\pi}{3} \text{ 时, } f(x) \text{ 最小为 } f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

$$\text{当 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ 即 } x = \frac{\pi}{12} \text{ 时, } f(x) \text{ 最大为 } f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore f(x) \text{ 最大值为 } 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 最小值为 } -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质；求固定区间正弦型函数值域；函数的值域

18. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\sin^2\omega x + a$, ($\omega > 0$), 其图象的相邻两个最高点之间的距离为 π .

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

(2) 设 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴, $g(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin 2x$, 求 $g(x_0)$ 的值.

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $-\frac{3}{2}$, 求函数 $f(x)$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上的最大值, 并求此时 x 的取值.

【答案】(1) $\left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.

(2) $\frac{3}{4}$ 或 $\frac{5}{4}$.

(3) 最大值为 $\sqrt{3}$, 此时 $x = \frac{\pi}{12}$.

【解析】(1) $f(x) = \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\sin^2\omega x + a$
 $= \sin 2\omega x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 2\omega x \cdot \frac{1}{2} - 2(1 - \cos 2\omega x) + a$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x + \frac{3}{2}\cos 2\omega x - 2 + a$
 $= \sqrt{3}\sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 + a.$

由题意知, $T = \pi = \frac{2\pi}{2\omega}$, $\omega = 1$.

$\therefore f(x) = \sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 + a.$

$\therefore$ 单调递增区间为:

$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

$-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

即 $x \in \left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}.$

(2) 由题意得:

$\sqrt{3}\sin\left(2x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = \pm\sqrt{3}.$

即 $\sin\left(2x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1.$

则 $\sin 2x_0 = \sin\left[\left(2x_0 + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right]$

$= \pm 1 \times \frac{1}{2} - 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \pm \frac{1}{2}.$

$\therefore g(x_0) = 1 + \frac{1}{2}\sin 2x_0$

$= \pm \frac{1}{4} + 1.$

$\therefore g(x_0) = \frac{5}{4}$ 或 $\frac{3}{4}.$

$$\begin{aligned}
 (3) \because x &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] . \\
 \therefore \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &\in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] . \\
 \therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &\in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right] . \\
 \therefore \sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &\in \left[-\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right] . \\
 \therefore f(x)_{\min} &= -\frac{3}{2} - 2 + a = -\frac{3}{2} . \\
 \therefore a &= 2 . \\
 \therefore f(x)_{\max} &= \sqrt{3} - 2 + a = \sqrt{3} . \\
 \text{此时, } 2x + \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{2} . \\
 x &= \frac{\pi}{12} .
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】求固定区间正弦型函数值域；正弦函数的图象和性质；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦

19. 已知函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $P\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ ，且图象上与 P 点最近的一个最高点坐标为 $\left(\frac{\pi}{3}, 5\right)$ 。

(1) 求函数的解析式。

(2) 若将此函数的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，横坐标伸长到原来的2倍，得到 $g(x)$ 的图象。

① 求 $g(x) + \frac{5\sqrt{2}}{2} > 0$ 的解集。

② 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，若 $g(x) = 4$ ，求 $\sin\left(2x - \frac{5\pi}{12}\right)$ 的值。

【答案】 (1) $y = 5 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 。

(2) ① $\left(-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \frac{13\pi}{12} + 2k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$ 。

② $-\frac{7\sqrt{2}}{50}$ 。

【解析】 (1) 由已知得：

$$A = 5 .$$

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} .$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi .$$

$$\therefore \omega = 2 .$$

$$\therefore y = 5 \sin(2x + \varphi) .$$

$$\text{由 } 5 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 0 \text{ 得:}$$

$$\frac{\pi}{6} + \varphi = 0 .$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore y = 5 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right).$$

(2) ① 由题意得：

$$g(x) = 5 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right).$$

$$g(x) + \frac{5\sqrt{2}}{2} > 0.$$

$$\text{即 } 5 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) > -\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{解得 } x \in \left(-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \right), k \in \mathbf{Z}.$$

$$\textcircled{2} \quad g(x) = 5 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 4.$$

$$\therefore \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4}{5}.$$

$$\begin{aligned} \sin \left(2x - \frac{5\pi}{12} \right) &= \sin \left[2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{3\pi}{4} \right] \\ &= \sin \left[2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right] \cdot \cos \frac{3\pi}{4} - \cos \left[2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right] \cdot \sin \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\therefore x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

$$\therefore \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right].$$

$$\text{又 } \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4}{5} > 0.$$

$$\therefore \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right].$$

$$\therefore \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{1 - \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}$$

$$= \frac{3}{5}.$$

$$\therefore \sin \left[2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right] = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{24}{25}.$$

$$\cos \left[2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right] = 1 - 2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 1 - 2 \times \frac{16}{25}$$

$$= -\frac{7}{25}.$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{24}{25} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{7}{25} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\frac{17\sqrt{2}}{50}.$$

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式；已知正弦型函数图象求参数值；正弦函数的图象和性质；正余弦型、正切型函数图象变换；二倍角的余弦；半角公式

20. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) - b$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的图象两相邻对称轴之间的距离是 $\frac{\pi}{2}$, 若将 $f(x)$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再向上平移 $\sqrt{3}$ 个单位, 所得函数 $g(x)$ 为奇函数.
- (1) 求 $f(x)$ 的解析式.
- (2) 求 $f(x)$ 的对称轴及单调区间.
- (3) 若对任意 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $f^2(x) - (2+m)f(x) + 2+m \leq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}$.

(2) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 增区间为 $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z})$, 减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(3) $\left(-\infty, \frac{-1-3\sqrt{3}}{2}\right]$.

【解析】 (1) $\because \frac{2\pi}{\omega} = 2 \times \frac{\pi}{2}$,
 $\therefore \omega = 2$,

$$\therefore f(x) = \sin(2x + \varphi) - b,$$

$$\text{又 } g(x) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right] - b + \sqrt{3} \text{ 为奇函数,}$$

$$\text{且 } 0 < \varphi < \pi, \text{ 则 } \varphi = \frac{\pi}{3}, b = \sqrt{3},$$

$$\text{故 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}.$$

$$(2) \text{ 令 } 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{求得 } x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{可得 } f(x) \text{ 的图象的对称轴为 } x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{求得 } k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12},$$

$$\text{可得函数的增区间为 } \left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{令 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2},$$

$$\text{求得 } k\pi + \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{7\pi}{12},$$

$$\text{可得函数的减区间为 } \left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z}).$$

$$(3) \text{ 由于 } x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right],$$

$$\text{故 } -\sqrt{3} \leq f(x) \leq 1 - \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} \leq f(x) - 1 \leq -\sqrt{3},$$

$$\therefore f^2(x) - (2+m)f(x) + 2+m \leq 0 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{整理可得 } m \leq \frac{1}{f(x) - 1} + f(x) - 1,$$

$$\text{由 } -1 - \sqrt{3} \leq f(x) - 1 \leq -\sqrt{3},$$

$$\begin{aligned} \text{得: } \frac{-1-3\sqrt{3}}{2} &\leq \frac{1}{f(x)-1} + f(x) - 1 \leq -\frac{4\sqrt{3}}{3}, \\ \text{故 } m &\leq \frac{-1-3\sqrt{3}}{2}, \\ \text{即 } m \text{ 取值范围是 } &\left(-\infty, \frac{-1-3\sqrt{3}}{2}\right]. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题