

第三讲-三角函数综合（二）练习题

1. 已知 $\omega > 0$ ，函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \omega x + \cos \omega x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减，则实数 ω 的取值范围是（ ）.
- A. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ C. $(0, \frac{1}{2}]$ D. $(0, 2]$

【答案】 A

【解析】 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \omega x + \cos \omega x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ ，
令 $\omega x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi]$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，
得 $x \in [\frac{\pi + 8k\pi}{4\omega}, \frac{5\pi + 8k\pi}{4\omega}]$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，为 $f(x)$ 的单调递减区间，
 $\because y = f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减，
 $\therefore \begin{cases} \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi + 8k\pi}{4\omega} \\ \pi \leq \frac{5\pi + 8k\pi}{4\omega} \end{cases}$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，解得 $\frac{1 + 8k}{2} \leq \omega \leq \frac{5 + 8k}{4}$ ，
当 $k = 0$ 时， $\omega \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ 。

【标注】 【知识点】 正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质；辅助角公式；倍角、和差角公式综合

2. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$)，若 $f(\frac{\pi}{4}) = 2$ ， $f(\pi) = 0$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ 上具有单调性，那么 ω 的取值共有（ ）.
- A. 6个 B. 7个 C. 8个 D. 9个

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ，
 $f(\frac{\pi}{4}) = 2$ ， $f(\pi) = 0$ ，
①由题意有 $\pi - \frac{\pi}{4} = (k + \frac{1}{4})T$ ， k 为非负整数；
又 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ 上具有单调性，
 $\therefore \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{T}{2}$ ， $\therefore T \geq \frac{\pi}{6}$ ，
又 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ， $\therefore \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{6}$ ，解得 $\omega \leq 12$ ，
 $\therefore \pi - \frac{\pi}{4} = (k + \frac{1}{4})\frac{2\pi}{\omega}$ ，

$$\text{解得 } \omega = \frac{24}{9}k + \frac{6}{9} \leq 12; \therefore k \leq \frac{51}{12}, \text{ 取 } k \leq 4;$$

$\therefore k$ 的取值范围是 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$;

$$\text{②由题意, 有 } \pi - \frac{\pi}{4} = \left(k + \frac{3}{4}\right)T,$$

$$\text{由①解得, } \omega = \frac{24}{9}k + \frac{18}{9} \geq 12,$$

$\therefore$ 取 $k \leq 3$,

$\therefore k$ 的取值范围是 $\{0, 1, 2, 3\}$;

$\therefore \omega$ 的取值共有 $5 + 4 = 9$ 种.

故选 D.

【标注】【素养】数学抽象；数学运算

【知识点】已知正弦型函数图象求参数值

3. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $\left(0, \frac{4\pi}{3}\right)$ 递增, 在 $\left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right)$ 递减, 则 $\omega =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\because f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1,$

$$\therefore \frac{4\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \omega = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{且 } \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore \omega \leq \frac{3}{4}$$

$$\therefore \omega = \frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

4. 若函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 在区间 $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递增, 且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) > f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, 则 ω 的值不可能

是 ().
A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{7}{10}$

C. $\frac{17}{24}$

D. $\frac{3}{4}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 在区间 $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递增,

$$\therefore \frac{T}{4} \geq \frac{2\pi}{3}, \text{ 即 } T \geq \frac{8\pi}{3}, \text{ 即 } \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{8\pi}{3}, \text{ 则 } 0 < \omega \leq \frac{3}{4},$$

$$\therefore f\left(\frac{2\pi}{3}\right) > f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$\therefore$ 对称轴 $\frac{T}{4} < \frac{\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{9\pi}{12}$, 即 $T < 3\pi$,
 即 $\frac{2\pi}{\omega} < 3\pi$, 即 $\omega > \frac{2}{3}$,
 即 $\frac{2}{3} < \omega \leq \frac{3}{4}$, 则 $\frac{3}{5}$ 不满足条件,
 故选 A.

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

5. 已知函数 $f(x) = a \sin x - 2\sqrt{3} \cos x$ 的一条对称轴为 $x = -\frac{\pi}{6}$, $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 且函数 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上具有单调性, 则 $|x_1 + x_2|$ 的最小值为 ().
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{4\pi}{3}$

【答案】 C

【解析】 由是得 $f(x) = a \sin x - 2\sqrt{3} \cos x = \sqrt{a^2 + 12} \sin(x + \theta)$,
 因为函数 $f(x) = a \sin x - 2\sqrt{3} \cos x$ 的一条对称轴为 $x = -\frac{\pi}{6}$, 且 $f(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}a - 3$,
 所以 $|\frac{1}{2}a - 3| = \sqrt{a^2 + 12}$, 解得 $a = 2$,
 所以 $f(x) = 2 \sin x - 2\sqrt{3} \cos x = 4 \sin(x - \frac{\pi}{3})$,
 令 $x - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $x = k\pi + \frac{\pi}{3}, (k \in \mathbf{Z})$, 即函数 $f(x)$ 对称中心为 $(\frac{\pi}{3} + k\pi, 0)$,
 $k \in \mathbf{Z}$.
 由 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 得 $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
 则 $|x_1 + x_2|$ 最小值为 $\frac{2\pi}{3}$.
 故选 C.

【标注】【知识点】求正弦型函数的单调区间

6. 函数 $f(x) = \sin \frac{\pi}{6} x \cos \frac{\pi}{6} x - \sqrt{3} \sin^2 \frac{\pi}{6} x$, 在区间 $[-1, a]$ 上至少取得 2 个最大值, 则正整数 a 的最小值是 ().
- A. 7 B. 8 C. 6 D. 5

【答案】 A

【解析】 函数 $f(x) = \sin \frac{\pi}{6} x \cos \frac{\pi}{6} x - \sqrt{3} \sin^2 \frac{\pi}{6} x$
 $= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} x - \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos \frac{\pi}{3} x)$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$ 函数的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 6$,

又 $f(x)$ 在区间 $[-1, a]$ 上至少取得 2 个最大值,

$$\therefore a - (-1) > T + \frac{T}{4} \geq 7.5,$$

解得 $a > 6.5$,

$\therefore$ 正整数 a 的最小值是 7.

故选 A.

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

7. 为使函数 $y = A \sin \omega x (A > 0, \omega > 0)$ 在区间 $[0, 1]$ 对应的图象上至少出现 50 个取最小值的点, 则 ω 的最小值是 ().

- A. $\frac{199\pi}{2}$ B. $\frac{199\pi}{4}$ C. 100π D. 50π

【答案】 A

【解析】 函数 $y = A \sin \omega x (\omega > 0)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$,

当 $x = \frac{(4k-1)\pi}{2\omega}$ (k 为整数) 时, y 出现最小值.

为了使函数在区间 $[0, 1]$ 上至少出现 50 次最大值,

则必须 $0 \leq (4k-1)\frac{\pi}{2\omega} \leq 1$ (k 为正整数, 且 $1 \leq k \leq 50$),

则 $f(k) = (4k-1)\frac{\pi}{2\omega}$ 对 k 而言是单调递增函数,

$0 \leq f(x) \leq 1$ 显然成立,

还必须: $f(50) = (4 \times 50 - 1)\frac{\pi}{2\omega} \leq 1$,

解得: $\omega \geq \frac{199\pi}{2}$.

故选: A.

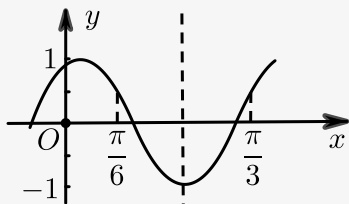
【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质；正弦型函数的图象与性质

8. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) (\omega > 0)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上有最小值, 无最大值, 则 ω 的值为 ().

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{11}{3}$ C. $\frac{14}{3}$ D. $\frac{7}{3}$

【答案】 C

【解析】 如图所示,



因为 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ，

又 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 内只有最小值，没有最大值，所以 $f(x)$ 在 $\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{4}$ 处取得最小值，所以 $\frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\omega = 8k - \frac{10}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$)，当 $k = 1$ 时，
 $\omega = 8 - \frac{10}{3} = \frac{14}{3}$ ，

此时函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 内存在最小值，故 $\omega = \frac{14}{3}$ 。

故选 C。

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质；已知正弦型函数图象求参数值

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$)，若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内无最值，则 ω 的取值范围是 ()。

A. $\left(0, \frac{5}{8}\right]$

B. $\left(0, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right]$

C. $\left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right]$

D. $\left[\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right]$

【答案】 B

【解析】 $\because x \in (\pi, 2\pi)$ ，

$$\therefore \omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(\omega\pi + \frac{\pi}{4}, 2\omega\pi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\textcircled{1} 2\omega\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \omega \leq \frac{1}{8};$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \omega\pi + \frac{\pi}{4} \geq \frac{3\pi}{2} \\ 2\omega\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{2} \end{cases} \text{ 时, } \frac{1}{4} \leq \omega \leq \frac{5}{8},$$

$$\text{综上: } \omega \in \left(0, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right].$$

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

10. 方程 $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2a - 1 = 0$ 在 $[0, \pi]$ 上有两个不相等的实数根，则 a 的取值范围是 _____。

【答案】 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right]$

【解析】 $\because 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2a - 1 = 0$,

$$\therefore \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 - 2a}{2},$$

$$\because x \in [0, \pi],$$

$$\therefore x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right],$$

$\therefore$ 方程 $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2a - 1 = 0$ 在 $[0, \pi]$ 上有两个不相等的实根,

$$\therefore x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right],$$

$$\therefore \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right),$$

$$\therefore \frac{1 - 2a}{2} \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right),$$

$$\therefore a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right],$$

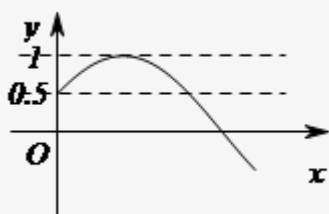
综上所述, 答案: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right]$.

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围; 正弦函数的图象和性质; 求固定区间正弦型函数值域

11. 设关于 x 的方程 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{k+1}{2}$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内有两个不同根 α, β , 则 k 的取值范围是 _____.

【答案】 $[0, 1)$

【解析】 正弦函数的图象.



$$\because x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \therefore \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right], \therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right].$$

根据题意可得 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象和直线 $y = \frac{k+1}{2}$ 有两个交点, 如图所示:

$$\therefore \frac{k+1}{2} \in [0.5, 1), \text{ 求得 } 0 \leq k < 1,$$

故答案为: $[0, 1)$.

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围; 利用函数图象研究方程根的分布问题(图象与零点综合); 函数零点的概念; 正弦函数的图象和性质

12. 函数 $f(x) = \sin x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$ 在区间 $\left(\frac{a\pi}{2}, a\pi\right)$ ($0 < a < 1$) 上有且仅有一个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{8}, 1\right)$

【解析】 $f(x) = \sin x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$
 $= \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \frac{1}{2}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right),$
 令 $f(x) = 0$, 则 $2x - \frac{\pi}{4} = k\pi$,
 得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}.$
 当 $k = 0$ 时, $x = \frac{\pi}{8}$, 此时 $\frac{a\pi}{2} < \frac{\pi}{8} < a\pi$, 得 $\frac{1}{8} < a < \frac{1}{4}.$
 当 $k = 1$ 时, $x = \frac{5\pi}{8}$, $\frac{a\pi}{2} < \frac{5\pi}{8} < a\pi$, 得 $\frac{5}{8} < a < 1.$
 综上所述, a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{8}, 1\right).$

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围; 正弦函数的图象和性质

13. 若函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减, 且在区间 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上存在零点, 则 φ 的取值范围是 ().
- A. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ B. $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ C. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ D. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

【答案】 D

【解析】 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $2x + \varphi \in \left[-\frac{\pi}{3} + \varphi, \frac{\pi}{3} + \varphi\right],$
 又 $\varphi \in (0, \pi), f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减,
 $\therefore \left[-\frac{\pi}{3} + \varphi, \frac{\pi}{3} + \varphi\right] \subseteq [0, \pi],$ 即 $\begin{cases} \varphi - \frac{\pi}{3} \geq 0 \\ \varphi + \frac{\pi}{3} \leq \pi \end{cases},$
 $\therefore \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3},$
 由 $\cos(2x + \varphi) = 0$, 得 $2x + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$
 $\therefore x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, k \in \mathbf{Z},$
 $\therefore 0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{6},$ 解得 $\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{2},$
 综上, $\frac{\pi}{3} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$
 故选 D.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质; 已知正弦型函数图象求参数值

14. 已知函数 $f(x) = \sin 2\omega x - 2\cos^2 \omega x + 1 (\omega > 0)$, $x \in \mathbf{R}$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围为 _____.

【答案】 $(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}] \cup [\frac{5}{4}, \frac{9}{8}]$

【解析】 $f(x) = \sin 2\omega x - 2 \times \frac{1 + \cos 2\omega x}{2} + 1 = \sqrt{2} \sin(2\omega x - \frac{\pi}{4}) (\omega > 0)$,

$$\text{令 } 2\omega x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow 2\omega x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{2\omega},$$

$$\text{令 } \frac{\pi}{2} < \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{2\omega} < \pi \Leftrightarrow \omega - \frac{1}{4} < k < 2\omega - \frac{1}{4},$$

又 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 无 0 点,

$$\Leftrightarrow \omega - \frac{1}{4} < k < 2\omega - \frac{1}{4} \text{ 中无整数解 } (\omega > 0),$$

$$\text{又 } f(x) \text{ 在 } (\frac{\pi}{2}, \pi) \text{ 无零点} \Rightarrow \frac{T}{2} \geq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \omega \leq 2,$$

$$\text{则 } (\omega - \frac{1}{4}, 2\omega - \frac{1}{4}) \leq (0, 1) \text{ 或 } (\omega - \frac{1}{4}, 2\omega - \frac{1}{4}) \leq (1, 2) \text{ 或}$$

$$(\omega - \frac{1}{4}, 2\omega - \frac{1}{4}) \leq (2, 3),$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega - \frac{1}{4} \geq 0 \\ 2\omega - \frac{1}{4} \leq 1 \\ 0 < \omega \leq 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \omega - \frac{1}{4} \geq 1 \\ 2\omega - \frac{1}{4} \leq 2 \\ 0 < \omega \leq 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \omega - \frac{1}{4} \geq 2 \\ 2\omega - \frac{1}{4} \leq 3 \\ 0 < \omega \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < \omega \leq \frac{5}{8} \text{ 或 } \frac{5}{4} \leq \omega \leq \frac{9}{8}.$$

$$\text{故答案为: } (\frac{1}{4}, \frac{5}{8}] \cup [\frac{5}{4}, \frac{9}{8}].$$

【标注】【知识点】零点、交点、根的等价转化；函数零点的概念；正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质；辅助角公式；倍角、和差角公式综合

15. 已知函数 $f(x) = 4\sin \omega x \cdot \sin^2(\frac{\omega}{2}x + \frac{\pi}{4}) - 2\sin^2 \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 上是增函数, 且在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得一次最大值, 则 ω 的取值范围是 _____.

【答案】 $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

【解析】 $f(x) = 4\sin \omega x \cdot \sin^2(\frac{\omega}{2}x + \frac{\pi}{4}) - 2\sin^2 \omega x (\omega > 0)$

$$= 4\sin \omega x \cdot \frac{1 - \cos(\omega x + \frac{\pi}{2})}{2} - 2\sin^2 \omega x$$

$$= 2\sin \omega x (1 + \sin \omega x) - 2\sin^2 \omega x$$

$$2\sin \omega x,$$

即 $f(x) = 2 \sin \omega x$,

$\therefore \left[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right]$ 是函数含原点的递增区间,

又 $\because$ 函数在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上递增, $\therefore \left[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right] \supseteq \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$,

$\therefore$ 得不等式组 $\begin{cases} -\frac{\pi}{2\omega} \leq -\frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2\omega} \end{cases}$, 得 $\begin{cases} \omega \leq 2 \\ \omega \leq \frac{2}{3} \end{cases}$,

又 $\because \omega > 0$,

$\therefore 0 < \omega \leq \frac{2}{3}$,

又函数在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得一次最大值,

根据正弦函数的性质可知 $\omega x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

即函数在 $x = \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega}$ 处取得最大值, 可得 $0 \leq \frac{\pi}{2\omega} \leq \pi$,

$\therefore \omega \geq \frac{1}{2}$,

综上, 可得 $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质; 半角公式; 二倍角的正弦

16. 已知函数 $f(x) = 3 \sin(\omega x + \phi) (\omega > 0, 0 < \phi < \pi)$, $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒有 $f(x) \leq \left|f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|$, 且在区间 $\left(\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个 x_1 使 $f(x_1) = 3$, 则 ω 的最大值为 ().
- A. $\frac{57}{4}$ B. $\frac{111}{4}$ C. $\frac{105}{4}$ D. $\frac{117}{4}$

【答案】 C

【解析】 由题可知, $\begin{cases} -\frac{\pi}{3}\omega + \phi = k_1\pi \\ \frac{\pi}{3}\omega + \phi = k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} (k_1, k_2 \in \mathbf{Z})$,

即 $\begin{cases} \omega = \frac{3(2k+1)}{4} \\ \phi = \frac{k'\pi}{2} + \frac{\pi}{4} (k, k' \in \mathbf{Z}) \end{cases}$,

$\therefore$ 在 $\left(\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{5}\right)$ 上有且仅有一个最大值,

$\therefore \left|\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{15}\right| = \frac{2\pi}{15} \leq 2T$,

即 $0 < \omega \leq 30$,

$\therefore k_1 < 19.5$.

当 $k_1 = 19$ 时, $\omega = \frac{117}{4}$, $\phi = \frac{3\pi}{4}$,

可使 $\begin{cases} -\frac{\pi}{3}\omega + \phi = k_1\pi \\ \frac{\pi}{3}\omega + \phi = k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} (k_1, k_2 \in \mathbf{Z})$ 成立,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{5}\right)$ 时, $\frac{117}{4}x + \frac{3\pi}{4} \in (2.7\pi, 6.6\pi)$,

$\therefore$ 当 $\frac{117}{4}x + \frac{3}{4}\pi = 4$, 5π 或 6.5π 时, $f(x) = 3$ 都成立, (不符, 舍去) .

当 $k = 18$ 时, $\omega = \frac{111}{4}x + \frac{3}{4}\pi \in (2.1\pi, 5.8\pi)$,

$\therefore$ 当 $\frac{111}{4}x + \frac{3}{4}\pi = 2.5\pi$ 或 4.5π 时, $f(x) = 3$ 都成立 (不符, 舍去) ,

当 $k = 17$ 时, $\omega = \frac{105}{4}$, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$,

可使 $\begin{cases} -\frac{\pi}{3}\omega + \phi = k_1\pi \\ \frac{\pi}{3} + \phi = k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} (k_1, k_2 \in \mathbf{Z})$ 成立 .

当 $x \in \left(\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{5}\right)$ 时, $\frac{105}{4}x + \frac{3}{4}\pi \in (2.5\pi + 6\pi)$,

$\therefore$ 当且仅当 $\frac{105}{4}x + \frac{3}{4}\pi = 4.5\pi$ 时, $f(x) = 3$ 成立 .

综上, $\omega_{\max} = \frac{105}{4}$.

故选C .

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

17. 将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位长度得到 $y = f(x)$ 的图象, 若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增, 且 $f(x)$ 的最大负零点在区间 $\left(-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}\right)$, 则 φ 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$

【解析】 将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位长度,

得到 $y = f(x) = \sin(2x - 2\varphi)$ 的图象 .

若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增, 则 $-\frac{\pi}{2} \leq -2\varphi$,

且 $\frac{\pi}{2} - 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 求得 $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ① .

令 $2x - 2\varphi = k\pi$, 求得 $x = \frac{k\pi}{2} + \varphi$, $k \in \mathbf{Z}$,

故函数的零点为 $x = \frac{k\pi}{2} + \varphi$, $k \in \mathbf{Z}$.

因为 $f(x)$ 的最大负零点在区间 $\left(-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}\right)$ 上,

所以 $-\frac{5}{12}\pi < \frac{k}{2}\pi + \varphi < -\frac{\pi}{6}$,

所以 $-\frac{5}{12}\pi - \frac{k}{2}\pi < \varphi < -\frac{\pi}{6} - \frac{k}{2}\pi$ ② .

由①②令 $k = -1$,

可得 $\frac{\pi}{12} < \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换；正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

