

05三角函数图像的特殊性质及单调性

1. 正弦型三角函数图像的特殊性质

1. 相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{T}{2}$.
2. 相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{T}{2}$.
3. 距离最近的对称轴与对称中心之间的距离为 $\frac{T}{4}$.

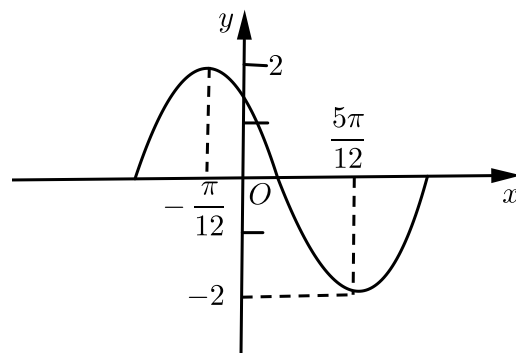
“ $(\oplus \circ \nabla \ominus)$ ” 回忆最大值轴、最小值轴、升零点、降零点的集合

这对我们利用图像解题帮助很大噢~

借助图像求解参数值

1. 2019~2020学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期末第8题3分 ★★

已知函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 在一个周期内的图象如图，此函数的解析式可以为 () .



- A. $y = 2 \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$
C. $y = 2 \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$

- B. $y = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$
D. $y = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$

【备注】 【教师备注】 轴与轴

【答案】 A

【解析】 由函数的图象可得函数的最大值为 2，最小值为 -2，故有 $A = 2$.

再由函数的周期性可得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot T &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) . \end{aligned}$$

解得： $\omega = 2$.

把点 $(-\frac{\pi}{12}, 2)$ 代入函数的解析式可得：

$$\begin{aligned} 2 \sin\left[2 \times \left(-\frac{\pi}{12}\right) + \varphi\right] &= 2 , \\ \therefore 2 \times \left(-\frac{\pi}{12}\right) + \varphi &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} , \quad k \in \mathbb{Z} , \end{aligned}$$

解得： $\varphi = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 。

故函数的解析式为

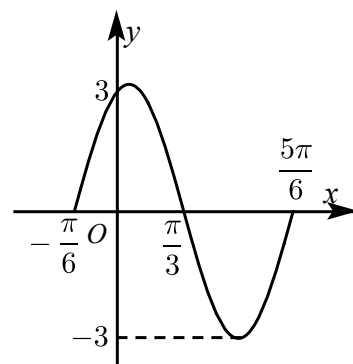
$$y = 2 \sin\left(2x + 2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right), \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ 考查四个选项, } A \text{ 符合题意.}$$

故选 A。

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值；正弦函数的图象和性质

2. 2020~2021学年广东广州番禺区广东仲元中学高一上学期期末第5题5分 ★★

如图是函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)，在一个周期内的图象，则其解析式是 ()。



A. $f(x) = 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

B. $f(x) = 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x) = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

D. $f(x) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

【备注】【教师备注】零点与零点

【答案】 D

【解析】 由图象知 $A = 3$ ，

$$\text{函数的周期 } T = \frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi,$$

$$\text{即 } \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \text{ 即 } \omega = 2,$$

$$\text{则 } f(x) = 3 \sin(2x + \varphi),$$

$$\text{由五点对应法得 } 2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \varphi = 0, \text{ 即 } \varphi = \frac{\pi}{3},$$

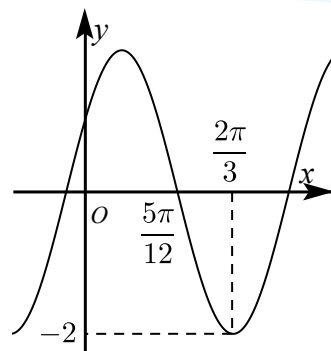
$$\text{则 } f(x) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

故选 D。

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值；正弦函数的图象和性质

3. 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第15题4分 ★★

已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\pi < \varphi \leq \pi$) 的部分图象如图，则 $\omega =$ _____， $\varphi =$ _____。



【备注】 【教师备注】 零点与轴 $\frac{T}{4}$

【答案】 $2; \frac{\pi}{6}$

【解析】 由函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象可知，

$$\text{周期 } T = 4 \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{5}{12}\pi \right) = \pi,$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2.$$

$$\therefore f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \sin\left(\frac{2}{3}\pi \cdot 2 + \varphi\right) = -2,$$

$$\therefore \frac{4}{3}\pi + \varphi = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即 } \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

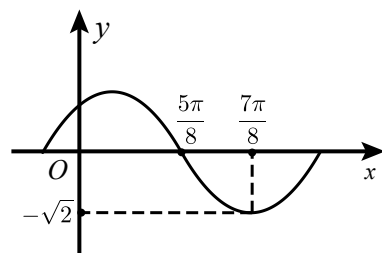
$$\text{又 } \because -\pi < \varphi \leq \pi,$$

$$\text{则 } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

【标注】 【知识点】 已知正弦型函数图象求参数值；正弦函数的图象和性质

4. 2020~2021学年天津高一上学期期末（部分区）第14题4分 ★★

函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)，在一个周期内的图象如图所示，则此函数的解析式 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

【解析】 $\because f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$ ，且 $A > 0$ ，

$$\text{故 } A = \sqrt{2},$$

$$\text{根据 } \frac{T}{4} = \frac{7\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{4}, \text{ 可得 } T = \pi = \frac{2\pi}{|\omega|},$$

$$\text{又 } \because \omega > 0,$$

$$\therefore \omega = 2,$$

$\therefore$ 点 $\left(\frac{7\pi}{8}, -\sqrt{2}\right)$ 在函数图象上, 可得 $\sqrt{2}\sin\left(2 \times \frac{7\pi}{8} + \varphi\right) = -\sqrt{2}$, 可得

$$\sin\left(2 \times \frac{7\pi}{8} + \varphi\right) = -1,$$

$$\text{故 } 2 \times \frac{7\pi}{8} + \varphi = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{因为 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 可得: } \varphi = -\frac{\pi}{4},$$

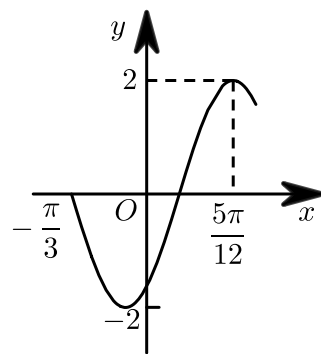
$$\therefore \text{函数 } f(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{故答案为: } \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值

5. 2018~2019学年12月天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期月考第16题4分 ★★

函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像如图所示, 则 φ 的值是 _____.



【备注】【教师备注】零点与轴 $\frac{3T}{4}$

【答案】 $-\frac{\pi}{3}$

【解析】 根据函数图像知,

$$\frac{3}{4}T = \frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4},$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi,$$

$$\therefore \omega = 2,$$

又由函数 $f(x)$ 的图像过 $\left(\frac{5\pi}{12}, 2\right)$,

$$\therefore 2 = 2\sin\left(2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi\right),$$

$$\therefore \frac{5\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即 } \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{3},$$

$$\text{又由 } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{得 } \varphi = -\frac{\pi}{3}.$$

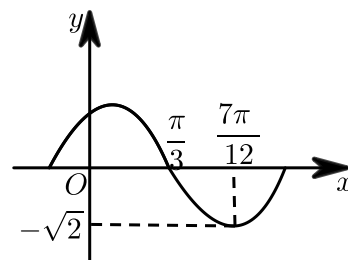
$$\text{故答案为: } -\frac{\pi}{3}.$$

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值；正弦函数的图象和性质

|| 包罗万象 举一干从

6. 2020~2021学年10月河南洛阳洛龙区洛阳市第一高级中学高三上学期月考文科第6题5分 ★★

函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 $f\left(\frac{11\pi}{24}\right)$ 的值为 () .



A. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. -1

【备注】【教师备注】赋值运算

【答案】D

【解析】由图象可得 $A = \sqrt{2}$,

$$\text{最小正周期 } T = 4 \times \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} \right) = \pi,$$

$$\text{则 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2,$$

$$\text{由 } f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{6} + \varphi\right) = -\sqrt{2}, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 得 } \varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{则 } f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{11\pi}{24}\right)$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right)$$

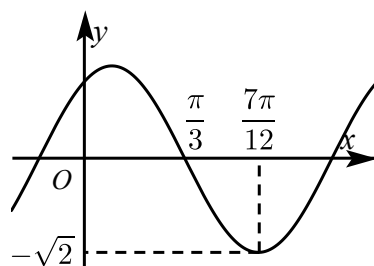
$$= \sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{4} = -1.$$

故选 D .

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值；正弦函数的图象和性质

7. 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期末第10题5分 ★★

函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$, (A, ω, φ 为常数, $A > 0, \omega > 0$) 的部分函数图象如图所示, 则 $A \tan \varphi$ 的值为 _____ .



【备注】【教师备注】赋值运算

【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】由图象可知， $A = \sqrt{2}$ ，

$$\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore T = \pi,$$

$$\text{再由 } T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \text{ 得 } \omega = 2,$$

$$\text{由五点作图可知, } \omega \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi,$$

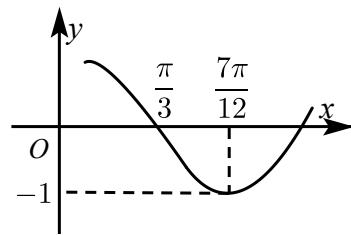
$$\text{即 } 2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi, \text{ 解得: } \varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore A \tan \varphi = \sqrt{2} \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值；正弦函数的图象和性质

8. 2018~2019学年天津武清区武清区杨村第一中学高一上学期期末（六校联考）第7题4分 ★★

函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，为了得到 $f(x)$ 的图象，则只要将 $g(x) = \cos 2x$ 的图象 () .



A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

【备注】【教师备注】结合平移变换

【答案】 B

【解析】由图可知 $A = 1$ ，由 $\frac{T}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}$ ，得 $\omega = 2$ ，

则函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ， $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，

将点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 代入函数 $f(x)$ ，得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ，故函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ，

$$\text{因为 } f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$$

$$= \sin(2x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})$$

$$= \cos(2x - \frac{\pi}{6})$$

$$= \cos[2(x - \frac{\pi}{12})],$$

所以只要将 $f(x) = \cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度即可。

故选 B。

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质；已知正弦型函数图象求参数值；正余弦型、正切型函数图象变换

2. 正弦型三角函数的单调性

【备注】【教师备注】这一讲主要学习求解函数单调区间的办法，具体考察的题目，多出现在后续学习了和差角、二倍角、辅助角公式对三角函数式进行化简整理后，再进行求解。所以前面的课时可适当压缩，多理解各个情况下如何求解单调区间或判断函数单调性。

1. $A > 0, \omega > 0$ 的推导过程

①对于正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$)，借助于**复合函数**的观点，可以将其拆解为三个基本初等函数：

一次函数 $u = \omega x + \varphi$ 、正弦函数 $v = \sin u$ ，正比例函数 $y = Av$ ，

②比如要求解该正弦型函数的单调递减区间，则在此区间上应该达到的效果是 $x \nearrow \Rightarrow y \searrow$ ，

③下面分析内层函数和外层函数，由于一次函数 $u = \omega x + \varphi$ 的一次项系数大于 0，故单调递增，因此 $x \nearrow$ 必会导致 $u \nearrow$ ，同理，针对于正比例函数 $y = Av$ ， $v \searrow$ 方可导致 $y \searrow$ ，

④因此若想要达到 $x \nearrow \Rightarrow y \searrow$ 的效果，关键在于中层函数 $v = \sin u$ ，应该使得该函数在区间 D 上满足 $u \nearrow \Rightarrow v \searrow$ ，这样才可以将三个链式关系顺利衔接起来，显然满足条件的区间 D 就是正弦函数的单调递减区间。

因此，将 $\omega x + \varphi$ 套入正弦函数的单调递减区间即可。

2. $A > 0, \omega > 0$ 的结论总结

正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的单调递减区间由不等式组
_____ 所确定。

同理正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的单调递增区间由不等式组
_____ 所确定。

【备注】【答案】

单调递减区间不等式： $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \omega x + \varphi \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 。

单调递增区间不等式： $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \omega x + \varphi \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$

【仅教师可见】此处可举例加深理解——

例如，求正弦型函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递减区间，只需解不等式组

$2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ，解得 $x \in \left[k\pi + \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{11\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z})$ 。

3. 不满足 A, ω 同时为正，求解单调区间

(1) 方法一：同增异减

(2) 方法二：利用诱导公式将 A 和 ω 均化为正数，然后套用上面的结论即可。

① A 负 ω 正：如对于正弦型函数 $y = -3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，根据诱导公式可得：

_____；

② A 正 ω 负：如对于正弦型函数 $y = 3 \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，根据诱导公式可得：

_____；

③ A 与 ω 同负：如对于正弦型函数 $y = -3 \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，根据诱导公式可得：

_____。

【备注】【答案】

① A 负 ω 正：如对于正弦型函数 $y = -3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，根据诱导公式可得：

$$y = -3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin\left[\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \pi\right] = 3 \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)；$$

② A 正 ω 负：如对于正弦型函数 $y = 3 \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，根据诱导公式可得：

$$y = 3 \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin\left[\pi - \left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 3 \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)；$$

③ A 与 ω 同负：如对于正弦型函数 $y = -3 \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，根据诱导公式可得：

$$y = -3 \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) = -3 \sin\left[-\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)。$$

4. 求单调区间的结论总结

(1) $A\omega > 0$

增区间：_____；

减区间：_____。

(2) $A\omega < 0$

增区间：_____；

减区间：_____。

【备注】【答案】

(1) $A\omega > 0$ ，增区间： $2k\pi - \frac{\pi}{2} < \omega x + \varphi < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ；

减区间： $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \omega x + \varphi < 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 。

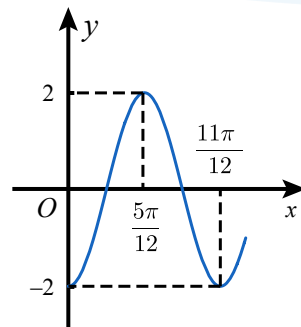
(2) $A\omega < 0$ ，增区间： $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \omega x + \varphi < 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ；

减区间： $2k\pi - \frac{\pi}{2} < \omega x + \varphi < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 。

求解单调区间

9. 2020~2021 学年天津河东区高一上学期期末第18题10分 ★★★

函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示。



(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调增区间.

【答案】 (1) $f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

(2) $\left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

【解析】 (1) 由图知 $A = 2$,

$$\frac{T}{2} = \frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore T = \pi,$$

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi,$$

$$\therefore \omega = 2,$$

$\therefore \frac{5\pi}{12}$ 对应着最高点,

$$\therefore \frac{5\pi}{12} \times 2 + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$(2) -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore \text{单增区间为 } \left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z}).$$

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值；求正弦型函数的单调区间

10. 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期末第8题3分 ★★

已知函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象上相邻的一个最大值点与对称中心分别为 $\left(\frac{2\pi}{9}, 3\right)$, $\left(\frac{\pi}{18}, 0\right)$, 则函数 $f(x)$ 的单调增区间为 ().

A. $\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}\right), k \in \mathbf{Z}$

B. $\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{4\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}\right), k \in \mathbf{Z}$

C.

D.

$$\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{18}\right), k \in \mathbf{Z}$$

$$\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{7\pi}{18}, \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18}\right), k \in \mathbf{Z}$$

【答案】A

【解析】由题意得，对称中心 $\left(\frac{\pi}{18}, 0\right)$ ，

可得 $b = 0$ ，

图象上相邻的一个最大值点与对称中心分别为 $\left(\frac{2\pi}{9}, 3\right)$ ， $\left(\frac{\pi}{18}, 0\right)$ ，

$$\therefore \frac{1}{4}T = \frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{18},$$

$$\text{即 } T = \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 3,$$

$$\therefore A = 3,$$

$$\therefore f\left(\frac{2\pi}{9}\right) = 3\sin(3x + \varphi) = 3,$$

$$\text{得 } \frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即 } \varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\because |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore f(x) = 3\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 3x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

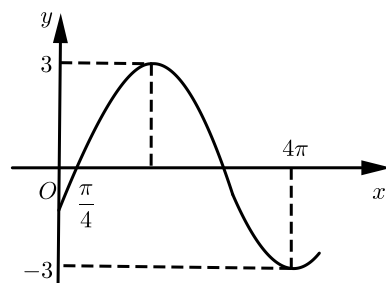
$$\text{得 } \frac{2}{3}k\pi - \frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{2}{3}k\pi + \frac{2\pi}{9},$$

故选 A.

【标注】【知识点】求正弦型函数的单调区间

11. 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期末第18题 ★★

函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的一段图象如图所示.



- (1) 求 $f(x)$ 的解析式.
- (2) 求 $f(x)$ 的单调增区间，并指出 $f(x)$ 的最大值及取到最大值时 x 的集合.
- (3) 把 $f(x)$ 的图象向左至少平移多少个单位，才能使得到的图象对应的函数为偶函数.

【答案】(1) $f(x) = 3\sin\left(\frac{2}{5}x - \frac{\pi}{10}\right)$.

(2) $\left[5k\pi - \pi, 5k\pi + \frac{3\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z}$; 最大值为 3; $\left\{x \mid x = 5k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(3) $\frac{3}{2}\pi$

【解析】(1) 由函数的图象可得 $A = 3$, $\frac{3}{4}T = \frac{3}{4} \times \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi - \frac{\pi}{4}$, 解得 $\omega = \frac{2}{5}$,

再根据五点法作图可得 $\frac{2}{5} \times \frac{\pi}{4} + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 由 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$,

则令 $k = 0$,

$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{10}$,

$\therefore f(x) = 3\sin\left(\frac{2}{5}x - \frac{\pi}{10}\right)$.

(2) 令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{2}{5}x - \frac{\pi}{10} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

求得 $5k\pi - \pi \leq x \leq 5k\pi + \frac{3\pi}{2}$,

故函数的增区间 $\left[5k\pi - \pi, 5k\pi + \frac{3\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z}$,

函数的最大值为 3,

此时, $\frac{2}{5}x - \frac{\pi}{10} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 即 $x = 5k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

即 $f(x)$ 的最大值为 3, 及取到最大值时 x 的集合为 $\left\{x \mid x = 5k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(3) 设把 $f(x) = 3\sin\left(\frac{2}{5}x - \frac{\pi}{10}\right)$ 的图象向左至少平移 m 个单位, 才能使得到的图象对应的函数为偶函数,

则由 $\frac{2}{5}(x+m) - \frac{\pi}{10} = \frac{2}{5}x + \frac{\pi}{2}$, 求得 $m = \frac{3}{2}\pi$,

把函数 $f(x) = 3\sin\left(\frac{2}{5}x - \frac{\pi}{10}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{3}{2}\pi$ 个单位,

可得 $y = 3\sin\left(\frac{2}{5}x + \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\frac{2}{5}x$ 的图象.

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值; 求固定区间正弦型函数值域; 正余弦型、正切型函数图象变换

12. 2018~2019学年天津高一上学期期末新四区联考第16题 ★★★

函数 $f(x) = A\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + k (A > 0, \omega > 0)$ 的最大值为 3, 最小值为 -1, 其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 求 $f(x)$ 的对称中心和单调减区间.

【答案】(1) $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

(2) $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 1\right), k \in \mathbf{Z}, \left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.

【解析】(1) 由题意知, $\begin{cases} A+k=3 \\ -A+k=-1 \end{cases}$, 解得 $A=2, k=1$,

$\therefore f(x)$ 图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

$$\therefore T = \pi,$$

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \text{ 即 } \omega = 2,$$

$$\therefore f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1.$$

$$(2) \text{ 令 } 2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, \text{ 解得 } x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},$$

$$\therefore \text{对称中心为 } \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 1\right), k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{令 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\text{解得 } \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi,$$

$$\therefore \text{单调减区间为 } \left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}.$$

【标注】【知识点】求正弦型函数的单调区间；求正弦型函数的对称中心

判断在确定区间上的单调性

13. 2018~2019学年12月天津南开区天津中学高一上学期月考第18题4分 ★

已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$), 下面结论错误的序号是 _____.

- ① 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π ;
- ② 函数 $f(x)$ 是偶函数;
- ③ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称;
- ④ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数.

【答案】 ③

【解析】 已知 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, ①对;

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos 2x, \text{ ②对;}$$

$$2x + \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}; \text{ ③错;}$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ 为增函数, 得 } -\pi + k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时, } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 为增函数, ④对;}$$

故选③.

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

14. 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期末第15题4分 ★★

若将函数 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列说法正确的是 _____ .

- ① $g(x)$ 的最小正周期为 π ；② $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减；
③ $x = \frac{\pi}{12}$ 不是函数 $g(x)$ 图象的对称轴；④ $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{2}$.

【答案】 ①③④

【解析】 根据题意可得， $g(x) = \cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{12}\right] = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

$g(x)$ 的最小正周期为 π ，故①正确；

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时， $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ ，故 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有增有减，故②错误；

$g\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$ ，故直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 不是 $g(x)$ 图象的对称轴，故③正确；

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时， $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ ，当 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ，即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时，

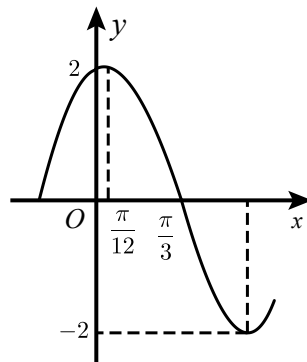
$g(x)$ 取得最小值 $-\frac{1}{2}$ ，故④正确 .

【标注】 【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换；已知余弦型函数判定结论正误

15. 2020~2021学年天津武清区武清区杨村第一中学高一上学期期末（六校联考）第8题4分 ★★★

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，下列说法正确的是 () .

- ① 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称
② 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 对称
③ 函数 $y = f(x)$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$ 单调递减
④ 该图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位可得 $y = 2 \sin 2x$ 的图象



A. ①②

B. ①③

C. ①②③

D. ①②④

【答案】 A

【解析】 由图知 $A = 2$ ， $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$ ，

$\therefore T = \pi$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \\
&\therefore \omega = 2, \\
&\therefore x = \frac{\pi}{12} \text{ 的点为图象的最高点,} \\
&\therefore 2 \cdot \frac{\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \\
&\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \\
&\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \\
&\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}, \\
&\therefore f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right). \\
&\textcircled{1} f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6} \times 2 + \frac{\pi}{3}\right) = 0, \\
&\therefore \textcircled{1} \text{对;} \\
&\textcircled{2} f\left(-\frac{5}{12}\pi\right) = 2\sin\left(-\frac{5}{12}\pi \times 2 + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= 2\sin\left(-\frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= -2, \\
&\therefore x = -\frac{5}{12}\pi \text{ 是对称轴, } \textcircled{2} \text{对;} \\
&\textcircled{3} \therefore x \in \left[-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{6}\right], \\
&\therefore 2x \in \left[-\frac{4}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}\right], \\
&\therefore 2x + \frac{\pi}{3} \in [-\pi, 0], \\
&\therefore f(x) \text{ 在 } \left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right] \text{ 先减后增, } \textcircled{3} \text{错;} \\
&\textcircled{4} f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ 右移 } \frac{\pi}{3}, \\
&\text{得到 } y = 2\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right), \\
&\text{即 } y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), \text{ 不是 } 2\sin 2x, \textcircled{4} \text{错.} \\
&\therefore \textcircled{1}\textcircled{2} \text{对.} \\
&\text{故选 A.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值

3. 已知区间求解正弦型函数值域

求解定义域为 D 的正弦型函数的值域的一般步骤.

① 先将正弦型函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 拆解为三个函数:

内层函数 $u = \omega x + \varphi$ 、中层函数 $v = \sin u$, 外层函数 $y = Av$.

② 求解定义域为 D 的一次函数 $u = \omega x + \varphi$ 的值域, 设其值域为 D_1 ;

③ 求解定义域为 D_1 的正弦函数 $v = \sin u$ 的值域, 此时需要结合正弦曲线来观察求解, 设其值域为

D_2 ;

④求解定义域为 D_2 的正比例函数 $y = Av$ 的值域，设其值域为 D_3 ，则 D_3 就是我们所要的答案。

简易流程如下：

$$\begin{cases} x \in D \\ u = \omega x + \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \in D_1 \\ v = \sin u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v \in D_2 \\ y = Av \end{cases} \Rightarrow y \in D_3, \text{ 输出 } D_3.$$

【仅教师可见】

可借助一个具体的例子来消化体验一下上面的方法：

2015年天津高考理科数学第15题（2）问

求函数 $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值。

$$\begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right] \\ u = 2x - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \\ v = \sin u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v \in \left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ y = \frac{1}{2}v \end{cases} \Rightarrow y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right].$$

16. 2013年高考真题天津卷文科第6题 ★★

函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为（ ）。

- A. -1 B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 0

【答案】 B

【解析】 由已知 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，得 $2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ ，所以 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ ，故函数

$f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质

17. 2018~2019学年天津河东区天津市第五十四中学高一上学期期末第5题4分 ★

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域（ ）。

- A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

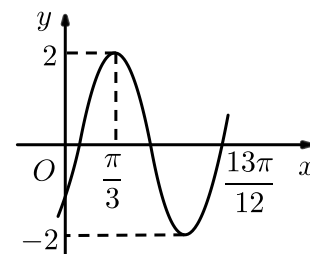
【答案】 C

【解析】 由 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，可得 $x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ ，所以函数 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ，故选 C。

【标注】 【知识点】 求固定区间余弦型函数值域

18. 2018~2019学年12月天津南开区天津中学高一上学期月考第21题8分 ★★

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示。



(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

【答案】 (1) $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$.

(2) 最小值为 -1 , 最大值为 2 .

【解析】 (1) $\frac{3}{4}T = \frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\pi$,

$$T = \pi = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = 2,$$

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 时 } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f(x)_{\max} = 2,$$

故 $A = 2$.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 2,$$

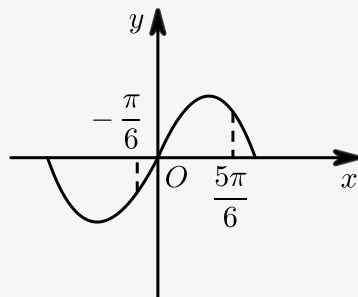
$$\therefore \frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\therefore f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

(2) $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$-\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6},$$



$$\text{故 } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right].$$

$$\therefore f(x) \in [-1, 2],$$

$$f(x)_{\min} = -1, \text{ 此时 } x = 0.$$

$$f(x)_{\max} = 2, \text{ 此时 } x = \frac{\pi}{3}.$$

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值；求固定区间正弦型函数值域

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$ (其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象与 x 轴的交点中, 相邻两个交点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且图象上一个最低点为 $M\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式.

(2) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 求 $f(x)$ 的值域.

【答案】 (1) $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(2) $[-1, 2]$.

【解析】 (1) 由最低点为 $M\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$ 得 $A = 2$.

由 x 轴上相邻的两个交点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ 得 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$,

即 $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$,

由点 $M\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$ 在图象上得 $2 \sin\left(2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = -2$,

即 $\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \varphi\right) = -1$, 故 $\frac{4\pi}{3} + \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore \varphi = 2k\pi - \frac{11\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$, 又 $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$, 故 $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(2) $\because x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\therefore 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$,

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 2;

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, 即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 -1.

故 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 2]$.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

4. 余弦型、正切型三角函数单调性

20. 2017~2018学年12月天津和平区天津市第一中学高一上学期月考第14题 ★★

函数 $y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的单增区间是 _____.

【答案】 $\left(\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

【解析】 $k\pi - \frac{\pi}{2} < 3x - \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2}$,

$k\pi - \frac{\pi}{4} < 3x < k\pi + \frac{3\pi}{4}$,

$\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12} < x < \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.

故答案为 $\left(\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

【标注】【知识点】正切型三角函数的图象与性质

21. 2017~2018学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第17题4分 ★★

函数 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的单调增区间是 _____ .

【答案】 $\left(k\pi - \frac{5\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right) (k \in \mathbf{Z})$

【解析】 令 $k\pi - \frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{3} < k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbf{Z})$,

解得 $k\pi - \frac{5\pi}{6} < x < k\pi + \frac{\pi}{6}, (k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore$ 函数 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的单调增区间是 $\left(k\pi - \frac{5\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right) (k \in \mathbf{Z})$.

故答案为: $\left(k\pi - \frac{5\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right) (k \in \mathbf{Z})$.

【标注】 【知识点】 正切函数的图象和性质；正切型三角函数的图象与性质

22. 2017~2018学年天津南开区高一上学期期末第16题8分 ★★

已知函数 $f(x) = 3 \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域、值域.

(2) 讨论 $f(x)$ 的周期性, 奇偶性和单调性.

【答案】 (1) 定义域: $\left\{x \mid x \neq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$;

值域: $\mathbf{R}$.

(2) $T = 2\pi$;

非奇非偶函数;

单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$.

【解析】 (1) 由 $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

计算出 $x \neq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$,

值域为 $\mathbf{R}$.

(2) $f(x)$ 为周期函数, 周期为 $T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$,

再根据 $f(-x) = 3 \tan\left(-\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) = -3 \tan\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$,

$\therefore f(-x) \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$,

$\therefore f(x)$ 为非奇非偶函数.

由 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

函数单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$.

23. 2017~2018学年天津南开区高一上学期期末第9题3分 ★★

A. $f(x)$ 的一个周期为 π

B. $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减

C. $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的一个零点为 $x = -\frac{\pi}{12}$

D. $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{3}$ 对称

【解析】 A. 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, $\therefore$ 周期为 $\pi + 2k\pi$, A 正确;

$$\text{C. } f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = A \cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= A \cos\left(2x + \pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= A \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{令 } A \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

解得 $x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$, C正确;

D. 对称轴为 $2x + \frac{2\pi}{3} = 2k\pi$, 解得 $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$, D 正确.

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质