

05三角函数图像的特殊性质及单调性

1. 正弦型三角函数图像的特殊性质

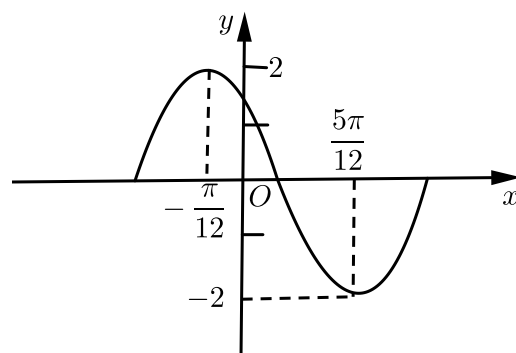
1. 相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{T}{2}$.
2. 相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{T}{2}$.
3. 距离最近的对称轴与对称中心之间的距离为 $\frac{T}{4}$.

“ $(\oplus \circ \nabla \ominus)$ ” 回忆最大值轴、最小值轴、升零点、降零点的集合

这对我们利用图像解题帮助很大噢~

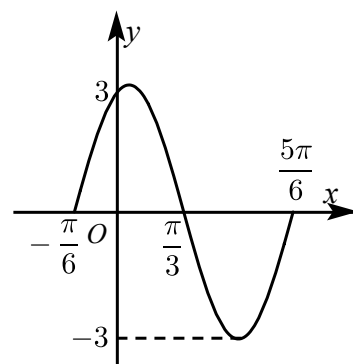
借助图像求解参数值

1. 已知函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 在一个周期内的图象如图，此函数的解析式可以为 () .



- A. $y = 2 \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$ B. $y = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$
C. $y = 2 \sin(\frac{x}{2} - \frac{x}{3})$ D. $y = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$

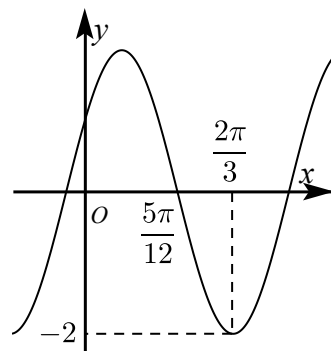
2. 如图是函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)，在一个周期内的图象，则其解析式是 () .



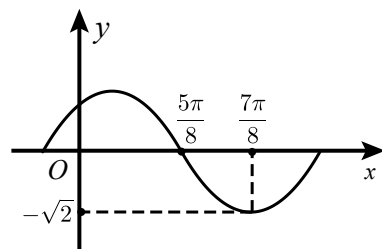
- A. $f(x) = 3 \sin(x + \frac{\pi}{3})$ B. $f(x) = 3 \sin(x + \frac{\pi}{6})$
C. $f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ D. $f(x) = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

3.

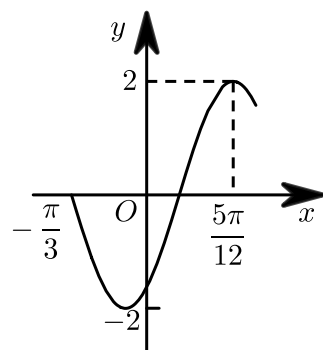
已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\pi < \varphi \leq \pi$) 的部分图象如图, 则 $\omega = \underline{\hspace{2cm}}$, $\varphi = \underline{\hspace{2cm}}$.



4. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 在一个周期内的图象如图所示, 则此函数的解析式 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

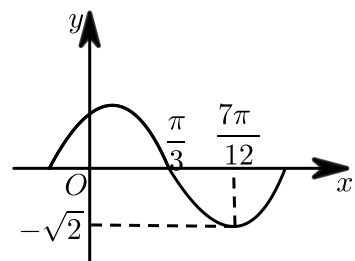


5. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 φ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



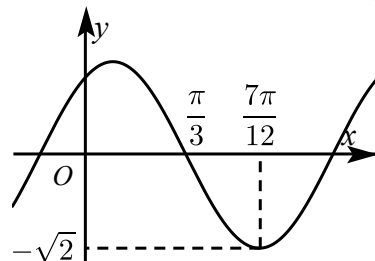
|| 包罗万象 举一千从

6. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 $f\left(\frac{11\pi}{24}\right)$ 的值为 ().

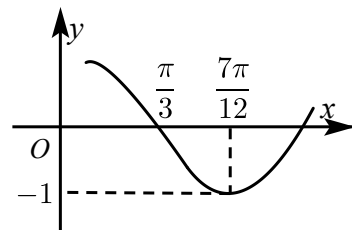


- A. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. -1

7. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$, (A, ω, φ 为常数, $A > 0, \omega > 0$) 的部分函数图象如图所示, 则 $A \tan \varphi$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



8. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 为了得到 $f(x)$ 的图象, 则只要将 $g(x) = \cos 2x$ 的图象 () .



- A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

2. 正弦型三角函数的单调性

1. $A > 0$, $\omega > 0$ 的推导过程

①对于正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$), 借助于复合函数的观点, 可以将其拆解为三个基本初等函数:

一次函数 $u = \omega x + \varphi$ 、正弦函数 $v = \sin u$, 正比例函数 $y = Av$,

②比如要求解该正弦型函数的单调递减区间, 则在此区间上应该达到的效果是 $x \nearrow \Rightarrow y \searrow$,

③下面分析内层函数和外层函数, 由于一次函数 $u = \omega x + \varphi$ 的一次项系数大于 0, 故单调递增, 因此 $x \nearrow$ 必会导致 $u \nearrow$, 同理, 针对于正比例函数 $y = Av$, $v \searrow$ 方可导致 $y \searrow$,

④因此若想要达到 $x \nearrow \Rightarrow y \searrow$ 的效果, 关键在于中层函数 $v = \sin u$, 应该使得该函数在区间 D 上满足 $u \nearrow \Rightarrow v \searrow$, 这样才可以将三个链式关系顺利衔接起来, 显然满足条件的区间 D 就是正弦函数的单调递减区间。

因此, 将 $\omega x + \varphi$ 套入正弦函数的单调递减区间即可。

2. $A > 0$, $\omega > 0$ 的结论总结

正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$) 的单调递减区间由不等式组
_____ 所确定。

同理正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$) 的单调递增区间由不等式组
_____ 所确定。

3. 不满足 A, ω 同时为正, 求解单调区间

(1) 方法一: 同增异减

(2) 方法二：利用诱导公式将 A 和 ω 均化为正数，然后套用上面的结论即可。

① A 负 ω 正：如对于正弦型函数 $y = -3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，根据诱导公式可得：

_____；

② A 正 ω 负：如对于正弦型函数 $y = 3 \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，根据诱导公式可得：

_____；

③ A 与 ω 同负：如对于正弦型函数 $y = -3 \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，根据诱导公式可得：

_____。

4. 求单调区间的结论总结

(1) $A\omega > 0$

增区间：_____；

减区间：_____。

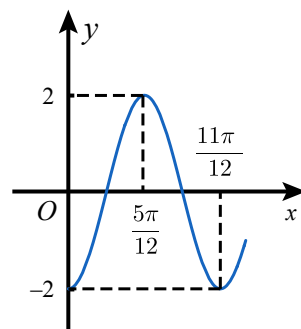
(2) $A\omega < 0$

增区间：_____；

减区间：_____。

求解单调区间

9. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示。



(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式。

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调增区间。

10. 已知函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象上相邻的一个最大值点与对称中心分别为 $\left(\frac{2\pi}{9}, 3\right)$ ， $\left(\frac{\pi}{18}, 0\right)$ ，则函数 $f(x)$ 的单调增区间为 ()。

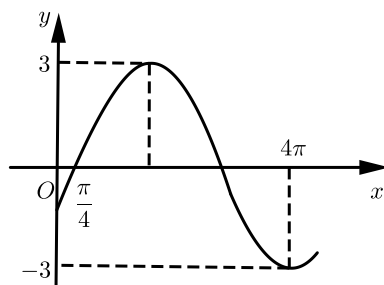
A. $\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}\right), k \in \mathbf{Z}$

B. $\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{4\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}\right), k \in \mathbf{Z}$

C. $\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{18}\right), k \in \mathbf{Z}$

D. $\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{7\pi}{18}, \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18}\right), k \in \mathbf{Z}$

11. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的一段图象如图所示。



- (1) 求 $f(x)$ 的解析式 .
- (2) 求 $f(x)$ 的单调增区间 , 并指出 $f(x)$ 的最大值及取到最大值时 x 的集合 .
- (3) 把 $f(x)$ 的图象向左至少平移多少个单位 , 才能使得到的图象对应的函数为偶函数 .

12. 函数 $f(x) = A \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + k (A > 0, \omega > 0)$ 的最大值为 3 , 最小值为 -1 , 其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式 .
- (2) 求 $f(x)$ 的对称中心和单调减区间 .

🔗 判断在确定区间上的单调性

13. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) (x \in \mathbf{R})$, 下面结论错误的序号是 _____ .

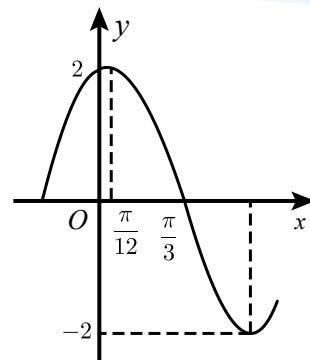
- ① 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π ;
- ② 函数 $f(x)$ 是偶函数 ;
- ③ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称 ;
- ④ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数 .

14. 若将函数 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度 , 得到函数 $g(x)$ 的图象 , 则下列说法正确的是 _____ .

- ① $g(x)$ 的最小正周期为 π ; ② $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减 ;
- ③ $x = \frac{\pi}{12}$ 不是函数 $g(x)$ 图象的对称轴 ; ④ $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{2}$.

15. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示 , 下列说法正确的是 () .

- ① 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称
- ② 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 对称
- ③ 函数 $y = f(x)$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$ 单调递减
- ④ 该图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位可得 $y = 2 \sin 2x$ 的图象



A. ①②

B. ①③

C. ①②③

D. ①②④

3. 已知区间求解正弦型函数值域

求解定义域为 D 的正弦型函数的值域的一般步骤 .

①先将正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 拆解为三个函数 :

内层函数 $u = \omega x + \varphi$ 、中层函数 $v = \sin u$, 外层函数 $y = Av$.

②求解定义域为 D 的一次函数 $u = \omega x + \varphi$ 的值域 , 设其值域为 D_1 ;

③求解定义域为 D_1 的正弦函数 $v = \sin u$ 的值域 , 此时需要结合正弦曲线来观察求解 , 设其值域为 D_2 ;

④求解定义域为 D_2 的正比例函数 $y = Av$ 的值域 , 设其值域为 D_3 , 则 D_3 就是我们所要的答案 .

简易流程如下 :

$$\begin{cases} x \in D \\ u = \omega x + \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \in D_1 \\ v = \sin u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v \in D_2 \\ y = Av \end{cases} \Rightarrow y \in D_3, \text{ 输出 } D_3 .$$

16. 函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 () .

A. -1

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 0

17. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域 () .

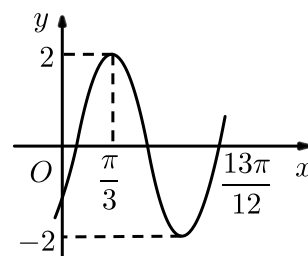
A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

18. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示 .



(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式 .

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值 .

19. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$ (其中 $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象与 x 轴的交点中 , 相邻两个交点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且图象上一个最低点为 $M\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式 .

(2) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2} \right]$ 时 , 求 $f(x)$ 的值域 .

4. 余弦型、正切型三角函数单调性

20. 函数 $y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的单增区间是 _____ .

21. 函数 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的单调增区间是 _____ .

22. 已知函数 $f(x) = 3 \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域、值域 .

(2) 讨论 $f(x)$ 的周期性 , 奇偶性和单调性 .

23. 设函数 $f(x) = A \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 则下列结论错误的是 () .

A. $f(x)$ 的一个周期为 π

B. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减

C. $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的一个零点为 $x = -\frac{\pi}{12}$

D. $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{3}$ 对称