

04正弦、余弦、正切型三角函数的图像性质

1. 正弦型、余弦型、正切型三角函数的基础性质

1. 正弦型三角函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$

- (1) 定义域：_____ .
- (2) 值域：_____ .
- (3) 最小正周期：_____ .
- (4) 对称性：对称轴_____；
对称中心_____

【备注】【答案】

- (1) 定义域： $\mathbf{R}$.
- (2) 值域： $[-|A|, |A|]$.
- (3) 最小正周期： $\left| \frac{2\pi}{\omega} \right|$.
- (4) 对称性：对称轴 $\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ；通过其解出 $x = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + \frac{k\pi}{\omega}$ ；
对称中心 $\omega x + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 通过其解出 $(x, 0)$

【教师备注】顺势引导几个注意点：

- ①函数零点和对称中心本质还是不同的，在正切里尤为明显。一般零点只需要横坐标，而对称中心是一个点；
- ②可对比说明下 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + a$ 的对应内容
(孩子不想再输一遍答案了值域和对称中心加个 a 就阔以了加油！)

2. 余弦型三角函数 $y = A \cos(\omega x + \varphi)$

- (1) 定义域：_____ .
- (2) 值域：_____ .
- (3) 最小正周期：_____ .
- (4) 对称性：对称轴_____；
对称中心_____

【备注】【答案】

- (1) 定义域： $\mathbf{R}$.
- (2) 值域： $[-|A|, |A|]$.
- (3) 最小正周期： $\left| \frac{2\pi}{\omega} \right|$.
- (4) 对称性：对称轴 $\omega x + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ；对称中心 $\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

3. 正切型三角函数 $y = A \tan(\omega x + \varphi)$

- (1) 定义域：_____ .
- (2) 值域：_____ .
- (3) 最小正周期：_____ .
- (4) 对称性：对称中心_____

【备注】【答案】

- (1) 定义域： $\left\{x \mid \omega x + \varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$
- (2) 值域： $\mathbf{R}$.
- (3) 最小正周期： $\left|\frac{\pi}{\omega}\right|$.
- (4) 对称性：对称中心 $\omega x + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

 正切型函数的定义域

1. 2016~2017学年天津红桥区高一上学期期末第11题4分 ★

函数 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域为 _____ .

【答案】 $\left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

【解析】 根据正切函数的性质可知，当 $2x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时，函数有意义，解得

$$x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} (k \in \mathbf{Z}),$$

故定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

【标注】【知识点】 正切函数的图象和性质；求具体函数（包括复合函数）的定义域

2. 2018~2019学年天津静海区高一上学期期末第12题4分 ★

函数 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域为 _____ .

【答案】 $\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$

【解析】 函数 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的有意义，

$$\text{必有 } x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \text{函数的定义域 } \{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\} .$$

$$\text{故答案为 } \{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\} .$$

【标注】【知识点】 正切函数的图象和性质

【知识点】 求具体函数（包括复合函数）的定义域

【素养】 数学运算

最小正周期

3. 2018~2019学年天津河东区天津市第五十四中学高一上学期期末第10题4分 ★★

函数 $f(x) = 2\sin\left(\pi x - \frac{1}{2}\right)$ 的最小正周期为 _____ .

【答案】 2

【解析】 由 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 得 $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$,
所以函数 $f(x) = 2\sin\left(\pi x - \frac{1}{2}\right)$ 的最小正周期为 2 .

【标注】 【知识点】求正弦型函数的周期

4. 2018~2019学年12月天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期月考第11题4分 ★

函数 $f(x) = 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ 的最小正周期为 _____ .

【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【解析】 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
故答案为 : $\frac{\pi}{2}$.

【标注】 【知识点】求余弦型函数的周期

5. 2020~2021学年天津高一上学期期末 (部分区) 第11题4分 ★

函数 $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, $x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 的最小正周期为 _____ .

【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【解析】 $\because y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,
 $\therefore$ 其最小正周期 $T = \frac{\pi}{2}$,
 $\therefore$ 函数 $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, $x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 的最小正周期为 : $\frac{\pi}{2}$.
故答案为 : $\frac{\pi}{2}$.

【标注】 【知识点】正切函数的图象和性质

精进不休 日新月异

6. 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期末第7题5分 ★★

在函数① $y = \cos|2x|$, ② $y = |\cos x|$, ③ $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, ④ $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 中 , 最小正周期为 π 的所有函数为 () .

A. ①②③

B. ①③④

C. ②④

D. ①③

【答案】 A**【解析】** ①中, $\cos 2x = y$ 是偶函数,

$$\therefore y = \cos |2x| = \cos 2x,$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{2} = \pi;$$

②中, $y = \cos |x|$ 的最小正周期为 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$;

$$\text{③中, } T = \frac{2\pi}{2} = \pi;$$

④中, $y = \tan x$ 的周期为 π ,

$$\therefore y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ 的周期为 } \frac{\pi}{2}.$$

 $\therefore$ ①②③成立.

故选 A.

【标注】【知识点】周期性

函数的最值/值域

7. 2020~2021学年天津西青区高一上学期期末第6题5分 ★

已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$, 则 ().A. $f(x)$ 是偶函数, 最大值为 1B. $f(x)$ 是偶函数, 最大值为 2C. $f(x)$ 是奇函数, 最大值为 1D. $f(x)$ 是奇函数, 最大值为 2**【答案】** B**【解析】** $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \cos x + 1$,

$$f(-x) = f(x), f(x) \leq 2,$$

故答案为 B.

【标注】【知识点】余弦函数的图象和性质

8. 2017~2018学年12月天津和平区天津市第一中学高一上学期月考第20题 ★★★

已知函数 $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.求 $f(x)$ 的最值及对应的 x 的值.**【答案】** (1) 3, $x = 4k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; -3, $x = 4k\pi + \frac{5\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.**【解析】** (1) 画图可知, 最大最小值为 3、-3.

【答案】 A

【解析】 $\because \varphi = 0 \Rightarrow f(x) = \cos(x + \varphi) (x \in \mathbf{R})$ 为偶函数，反之不成立，
 $\therefore \varphi = 0$ 是“ $f(x) = \cos(x + \varphi) (x \in \mathbf{R})$ 为偶函数”的充分而不必要条件。

【标注】 【知识点】 充要条件与三角函数结合；已知余弦型函数性质求解析式

 求解对称轴/对称中心

12. 2019~2020学年天津河东区高一上学期期末第6题5分 ★★

将函数 $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，再把所有的点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），得到函数 $y = g(x)$ 的图象，则 $y = g(x)$ 的图象的一个对称中心为（ ）。

A. $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ C. $\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)$ D. $\left(\frac{\pi}{12}, -1\right)$

【答案】 C

【解析】 将函数 $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，
得到： $y = 2\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - 1$ 的图象，再把所有的点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），
得到函数 $y = g(x) = 2\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) - 1$ 的图象，
令 $2x - \frac{2\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ，
解得： $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ ，
当 $k = 0$ 时， $x = \frac{\pi}{3}$ ，
所以，函数 $y = g(x)$ 的图象的一个对称中心为： $\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)$ ，
故选：C。

【标注】 【知识点】 正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

13. 2018~2019学年天津高一上学期期末新四区联考第5题 ★

若将函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，再把所得图象上的点的横坐标扩大到原来的 2 倍，得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 图象的一条对称轴为（ ）。

A. $x = \frac{5\pi}{6}$ B. $x = \frac{5\pi}{24}$ C. $x = \frac{5\pi}{12}$ D. $x = \frac{7\pi}{24}$

【答案】 A

【解析】 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，
将函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，

再把图象所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，

可得函数 $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，故 $g(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，

令 $x - \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

得到 $x = k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

则得 $y = g(x)$ 的图象的一条对称轴是 $x = \frac{5\pi}{6}$ 。

故选 A。

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

14. 2019~2020 学年天津静海区静海区第一中学高一上学期期末第 5 题 4 分 ★★

函数 $f(x) = 4 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期是 3π ，则其图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的函数的一条对称轴是 ()。

A. $x = \frac{\pi}{4}$

B. $x = \frac{\pi}{3}$

C. $x = \frac{5\pi}{6}$

D. $x = \frac{19\pi}{12}$

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x) = 4 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期是 3π ，则函数 $f(x) = 4 \sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$

，经过平移后得到函数解析式为 $y = 4 \sin\left[\frac{2}{3}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 4 \sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{4\pi}{9}\right)$ ，

由 $\frac{2}{3}x + \frac{4\pi}{9} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)，

得 $x = \frac{3}{2}k\pi + \frac{\pi}{12}$ ($k \in \mathbf{Z}$)，

当 $k = 1$ 时， $x = \frac{19\pi}{12}$ 。

故选 D。

【标注】【知识点】已知正弦型函数性质求解析式；求正弦型函数的对称轴

15. 2020~2021 学年天津北辰区天津市第四十七中学高一上学期期末第 6 题 5 分 ★★

将函数 $y = 2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，纵坐标不变，所得函数图象的一条对称轴的方程是 ()。

A. $x = \frac{\pi}{12}$

B. $x = -\frac{\pi}{6}$

C. $x = -\frac{\pi}{3}$

D. $x = -\frac{\pi}{12}$

【答案】 B

【解析】 $y = 2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 图象上各点横坐标伸长到原来的 2 倍，

得到 $y = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ ，

再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到 $y = 2 \cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right] + 1$ ，

令 $2x + \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)，

解得 $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k}{2}\pi (k \in \mathbf{Z})$.

当 $k = 0$ 时, $x = -\frac{\pi}{6}$.

故选 B .

【标注】【知识点】求余弦型函数的对称轴

|| 豪厘不伐 将用斧柯

16. 2019~2020学年天津河西区高一上学期期末第13题4分 ★★

函数 $y = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ 的图象的一个对称中心的坐标是 _____ .

【备注】【教师备注】注意对称中心的纵坐标

【答案】 $\left(-\frac{\pi}{8}, 1\right)$

【解析】 因为 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的对称中心横坐标为 $2x + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的对称中心坐标为 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$,

将 $f(x)$ 的图象向上平移一个单位可得 $y = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ 的图象 ,

所以函数 $y = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ 的对称中心坐标为 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, 1\right), k \in \mathbf{Z}$,

当 $k = 0$ 时, 为 $\left(-\frac{\pi}{8}, 1\right)$.

故答案为: $\left(-\frac{\pi}{8}, 1\right)$ (答案不为唯一) .

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换; 正弦函数的图象和性质; 正弦型函数的图象与性质; 对称性

🕒 判断函数对称性

17. 2018~2019学年天津河西区高一上学期期末第7题3分 ★★★

在下列结论中:

①函数 $y = \sin(k\pi - x) (k \in \mathbf{Z})$ 为奇函数;

②函数 $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称;

③函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一条对称轴为 $x = -\frac{2}{3}\pi$;

④若 $\tan(\pi - x) = 2$, 则 $\sin^2 x = \frac{1}{5}$.

其中正确的结论是 () .

A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①③④

【答案】 B

【解析】 对于①, 函数 $y = \sin(k\pi - x) (k \in \mathbf{Z})$, 当 k 为奇数时, $y = \sin x$ 为奇函数;

当 k 为偶数时, $y = -\sin x$ 为奇函数. 故①正确;

对于②, 当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $y = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \neq 0$, 故 $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象不关于 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称.

故②错误.

对于③, 当 $x = -\frac{2\pi}{3}$ 时, $y = \cos(-\pi) = -1$ 是函数 y 的最小值. 故③正确.

对于④, $\tan(\pi - x) = 2$, 则 $\tan x = -2$, $\tan^2 x = 4$, $\sin^2 x = \frac{4}{5}$. 故④错误.

综上所述, ①③正确, 选 B.

【标注】 【知识点】 正切型三角函数的图象与性质; 余弦函数的图象和性质; 正弦型函数的图象与性质; 正切函数的图象和性质; 余弦型三角函数的图象与性质; 正弦函数的图象和性质; 利用诱导公式化简; 诱导公式

18. 2019~2020学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期末第9题3分 ★★

对于函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,

①关于直线 $x = -\frac{\pi}{12}$ 对称;

②关于点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 对称;

③可看作是把 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度而得到;

④可看作是把 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的纵坐标不变, 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍而得到.

以上叙述正确的个数是 ().

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 B

【解析】 由 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

①当 $x = -\frac{\pi}{12}$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} = 0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故①错;

②当 $x = \frac{5\pi}{12}$, $2x + \frac{\pi}{6} = \pi$, 此时 $f(x) = 0$, 故②正确;

③由 $y = \sin 2x \xrightarrow{\text{左移 } \frac{\pi}{6}} y = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \neq f(x)$, 故③错;

④由 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{\text{横 } \frac{1}{2}} y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 故④正确, 故正确有 2 个.

故选 B.

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质; 正弦型函数的图象与性质; 正余弦型、正切型函数图象变换

19. 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第14题4分 ★★

已知函数 $f(x) = 3\sin(2x + \varphi)$ ，直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条对称轴，则 $\tan \varphi$ 的值为 _____ .

【答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = 3\sin(2x + \varphi)$ ，直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条对称轴，

$$\therefore 2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{则 } \tan \varphi = \tan\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right)$$

$$= \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\tan \frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \tan \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

|| 精进不休 日新月异

20. 2018~2019学年天津河东区天津市第五十四中学高一上学期期末第8题4分 ★★

已知函数 $f(x) = 3\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 与 $g(x) = 2\cos(2x + \varphi)$ 的图象对称轴完全相同，则函数 $g(x)$ 的对称中心可能为 () .

A. $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$

B. $\left(\frac{7\pi}{12}, 0\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$

D. $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$

【答案】 B

【解析】 因为函数 $f(x) = 3\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 图象的对称轴方程为 $\omega x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ，

$$\text{即 } x = \frac{k\pi}{\omega} + \frac{2\pi}{3\omega}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$g(x) = 2\cos(2x + \varphi) \text{ 图象的对称轴方程为 } 2x + \varphi = k\pi, \text{ 即 } x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

因为函数 $f(x) = 3\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 与 $g(x) = 2\cos(2x + \varphi)$ 的图象对称轴完全相同，

即周期完全相同，所以 $\omega = 2$ ，

$$\text{可得对称轴 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}.$$

$$\text{所以函数 } g(x) \text{ 的对称中心为 } \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}, 0\right).$$

所以对称中心可能为 $\left(\frac{7\pi}{12}, 0\right)$, 故选 B .

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；余弦函数的图象和性质；余弦型三角函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质